Geometrische Formeln

Geometrische Formeln.

Geometrische Formeln

und deren

Anwendung auf die Bau-Praxis.

Mit einer Tabelle über Festigkeit der Materialien

und praktischen Beispielen versehen.

Nebst einem Anhange:
Verhältnisse, nach welchen die Materialien bei Landbauten
berechnet werden.

Von

Franz Müller,

Director der Provinzial-Arbeitsanstalt zu Brauweiler.

Mit 87 Figuren in Holzschnitt.

Dritte Auflage.

Leipzig:
F. A. Brockhaus.

1868.

Vorwort.

Bei der Zusammenstellung der Formeln habe ich den Zweck im Auge gehabt, dem Techniker, insbesondere aber dem Bauhandwerker ein Mittel an die Hand zu geben, die in der Praxis vorkommenden Linien, Flächen und Körper nach einer genauen und sichern Grundlage zu berechnen und dadurch die oft angewendete oberflächliche, mehr oder minder unsichere Berechnung zu beseitigen. Ich hoffte, indem ich die vorliegende Bearbeitung der Oeffentlichkeit übergab, einem von verschiedenen Seiten geäußerten Bedürfnisse abgeholfen zu haben. Daß von dem vorliegenden Handbuche bereits die dritte Auflage nothwendig geworden ist, beweist wol zur Genüge, daß ein solches Bedürfniß vorhanden war, dann aber auch, daß das Bestreben, der primitiven Oberflächlichkeit die Resultate der Wissenschaft zu substituiren, sich immer mehr und mehr Bahn bricht.

Jede Formel ist, wo nur immer möglich, von einem Beispiel aus dem praktischen Leben begleitet; die specielle Auflösung desselben soll dazu dienen, auch dem weniger Geübten Anleitung zum Gebrauch der Formeln zu geben. Die Tabelle der specifischen Gewichte umfaßt die gewöhnlichsten Metalle, Stein- und Holzarten und Flüssigkeiten; sie ist zur Bequemlichkeit für den praktischen Gebrauch durch Angabe des absoluten Gewichts eines Kubikzolles

und eines Kubikfußes der angeführten Körper vervollständigt. Mehrere Beispiele zeigen die Anwendung derselben.

Ueber die Festigkeit der Materialien sind nur diejenigen Notizen aufgenommen worden, welche dem gewöhnlichen Bedürfnisse genügen; auch hier habe ich mich bestrebt, nur recht praktische Beispiele auszuwählen. Material dazu lieferten die Werke von Eitelwein, Rondelet u. a.

Da die Berechnung der Linien, Flächen und Körper immer der Anfertigung von Kostenanschlägen zu Grunde gelegt werden muß, so habe ich in einem Anhange die Verhältnisse angegeben, nach welchen die Materialien zu Landbauten zu berechnen sind; ich glaube dadurch dem Verfertiger solcher Anschläge eine Erleichterung gewährt zu haben.

Baubeflissene, welche sich eine gründlichere, wenn auch nicht wissenschaftliche Kenntniß der Geometrie verschaffen wollen, verweise ich auf mein in demselben Verlage wie vorliegende Schrift erschienenes „Lehrbuch der Geometrie für Handwerker-Fortbildungsschulen, sowie zum Selbstunterrichte für Baubeflissene, Mechaniker und Techniker", ein unentbehrliches Hülfsbuch für diejenigen, welche ihr Gewerbe selbständig betreiben wollen.

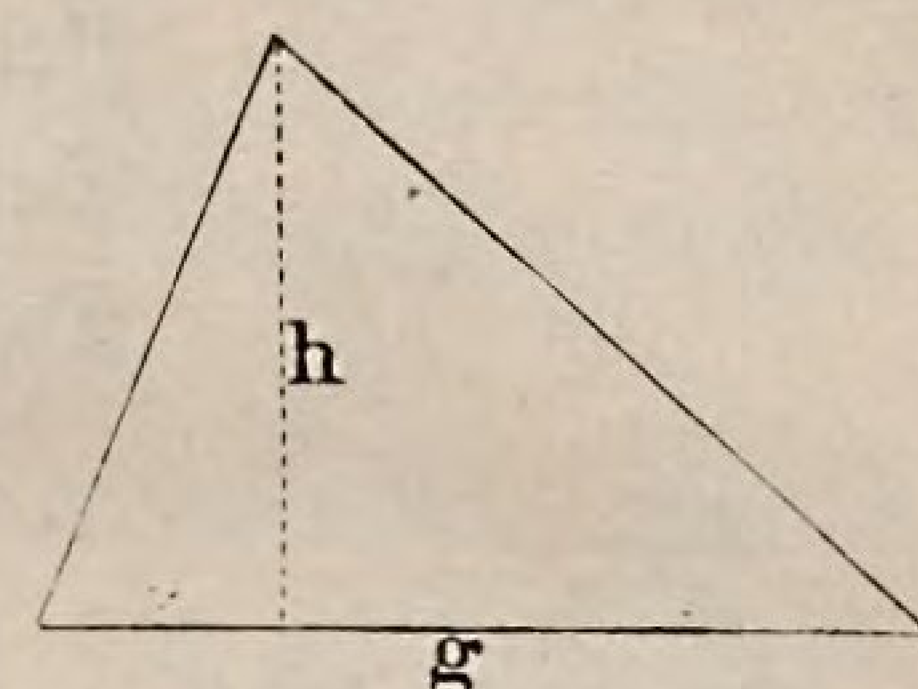
Brauweiler, im December 1867.

Der Verfasser.

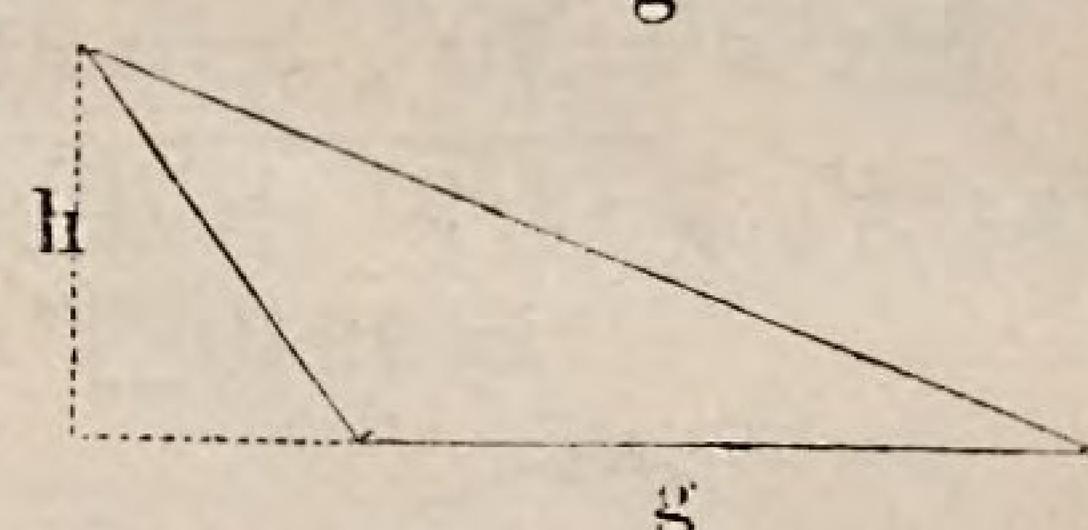
Inhalt.

I. Geradlinige ebene Figuren.

1. Der Flächeninhalt F eines Dreiecks, wenn eine Seite = g und die Höhe darauf = h gegeben ist, beträgt $\frac{g \cdot h}{2}$.

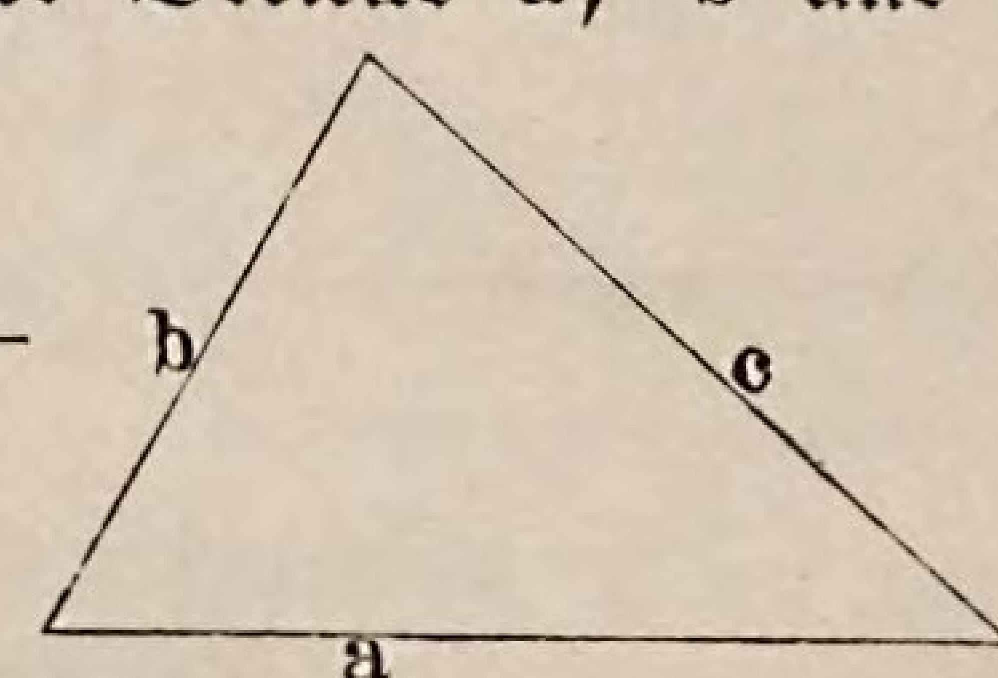


Ist die Grundlinie oder Breite eines Dachgiebels $41^3/_4{}'$, die Höhe $20^7/_8{}'$, so ist der Inhalt,



$$\frac{41^3/_4 \cdot 20^7/_8}{2} = 435^{49}/_{64}\ \square' = 3\ \square^\circ\ 3^{49}/_{64}\ \square'.$$

2. Sind die drei Seiten eines Dreiecks a, b und c gegeben, so ist der Inhalt des Dreiecks

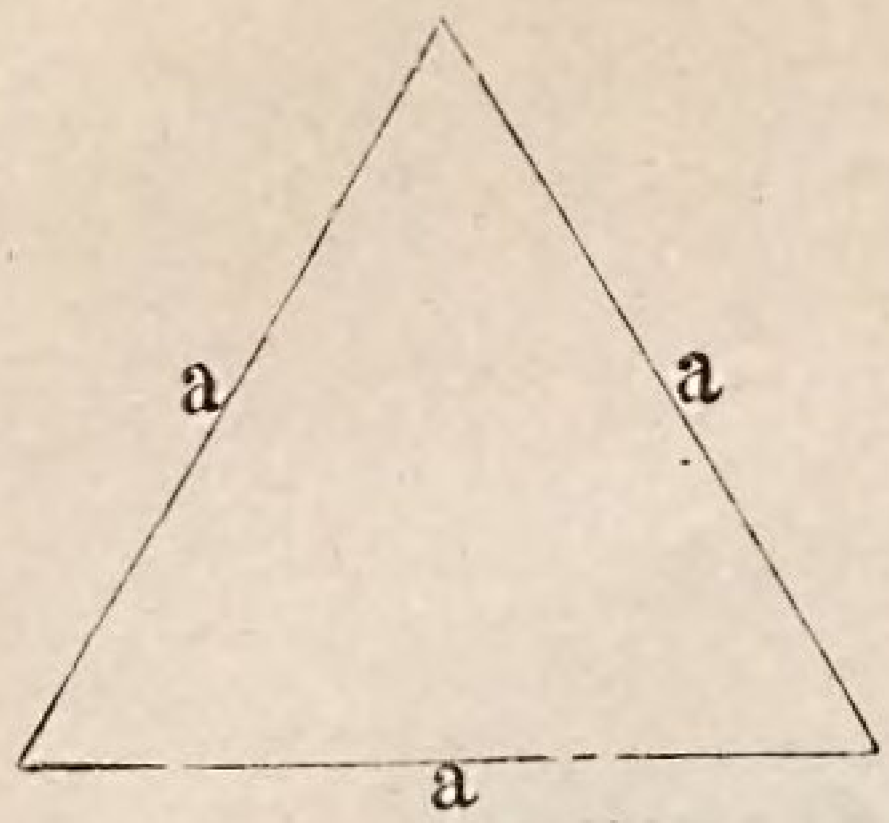


$$F = {}^1/_4 \sqrt{(a + b + c)\ (a + b - c)\ (a - b + c)\ (- a + b + c)}.$$

Ist $a = 21'$, $b = 20'$, $c = 13'$, so ist

$$F = {}^1/_4 \sqrt{(21 + 20 + 13)\ (21 + 20 - 13)\ (21 - 20 + 13)\ (- 21 + 20 + 13} =$$

$${}^1/_4 \sqrt{54 \cdot 28 \cdot 14 \cdot 12} = 126\ \square'.$$

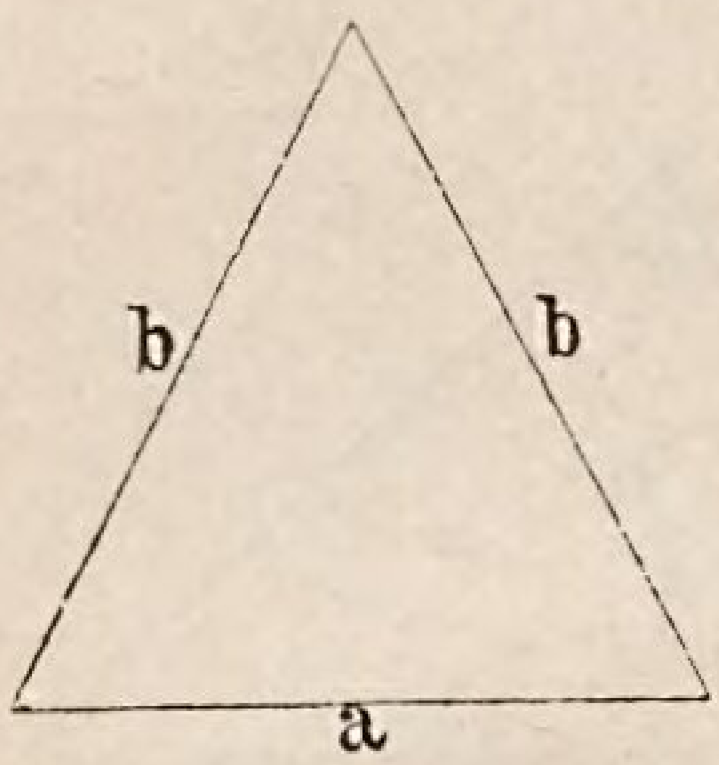


3. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= a$ gegeben, ist:

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Für $a = 9' \, 8''$ ist $F \, \frac{(9^2/_3)^2}{4}\sqrt{3} =$

$$\frac{29 \cdot 29}{3 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1{,}7321 = 40\square' \; 66\square''.$$

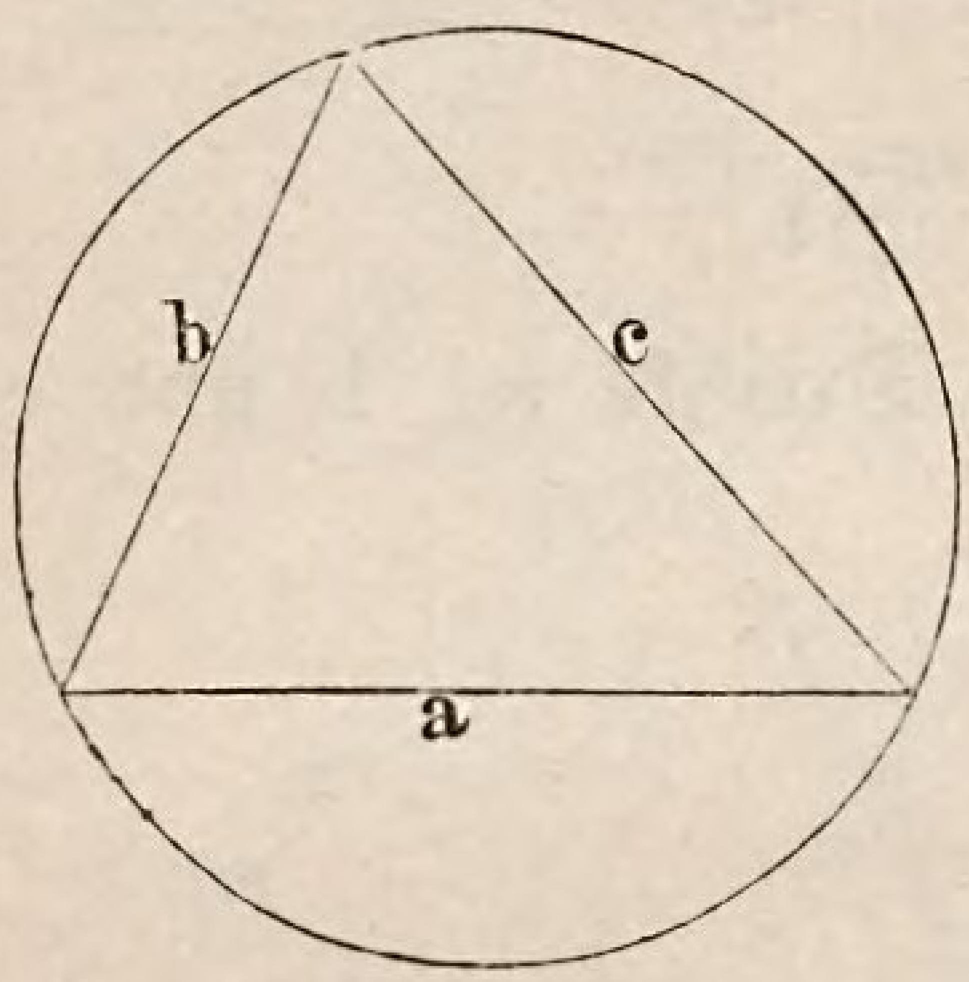


4. Ist jede der gleichen Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks $= b$, die dritte Seite $= a$ gegeben, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$F = \frac{a}{4}\sqrt{(2\,b + a)\,(2\,b - a)}.$$

Für $a = 70''$, $b = 91''$, ist

$$F = {}^{70}/_{4} \sqrt{(2 \cdot 91 + 70)\,(2 \cdot 91 - 70)} = {}^{70}/_{4} \sqrt{252 \cdot 112}$$
$$= 2940\square'' = 20\square' \; 60\square''.$$



5. Liegt das Dreieck in einem Kreise, und sind die Seiten $= a$, b, c und der Durchmesser $= d$, so ist der Inhalt

$$F = \frac{a\,b\,c}{2\,d}.$$

Für $a = 10''$, $b = 12''$, $c = 15''$, $d = 8''$ ist

$$F = \frac{10 \cdot 12 \cdot 15}{2 \cdot 8} = 112^1/_2\square''.$$

6. Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder wie die Quadrate gleichliegender Höhen.

Wenn z. B. eine gleichseitig dreieckige Dachfläche, deren Seite 18′ lang ist, 632 Dachziegel zur Deckung erfordert, so findet man die Anzahl Ziegel, welche zur Deckung einer gleichseitig dreieckigen Dachfläche von 23′ Seitenlänge nöthig sind, durch die Proportion

$$632 : x = 18^2 : 23^2;$$

daraus ist $x = 1032$ Stück.

7. Sind zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks gegeben, so läßt sich die dritte Seite nach dem Pythagoräischen Lehrsatze bestimmen. Derselbe lautet: Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Hieraus folgt, daß das Quadrat einer Kathete gleich ist der Differenz zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem Quadrate der andern Kathete.

Bezeichnet a die Hypotenuse, b und c die beiden Katheten, so ist

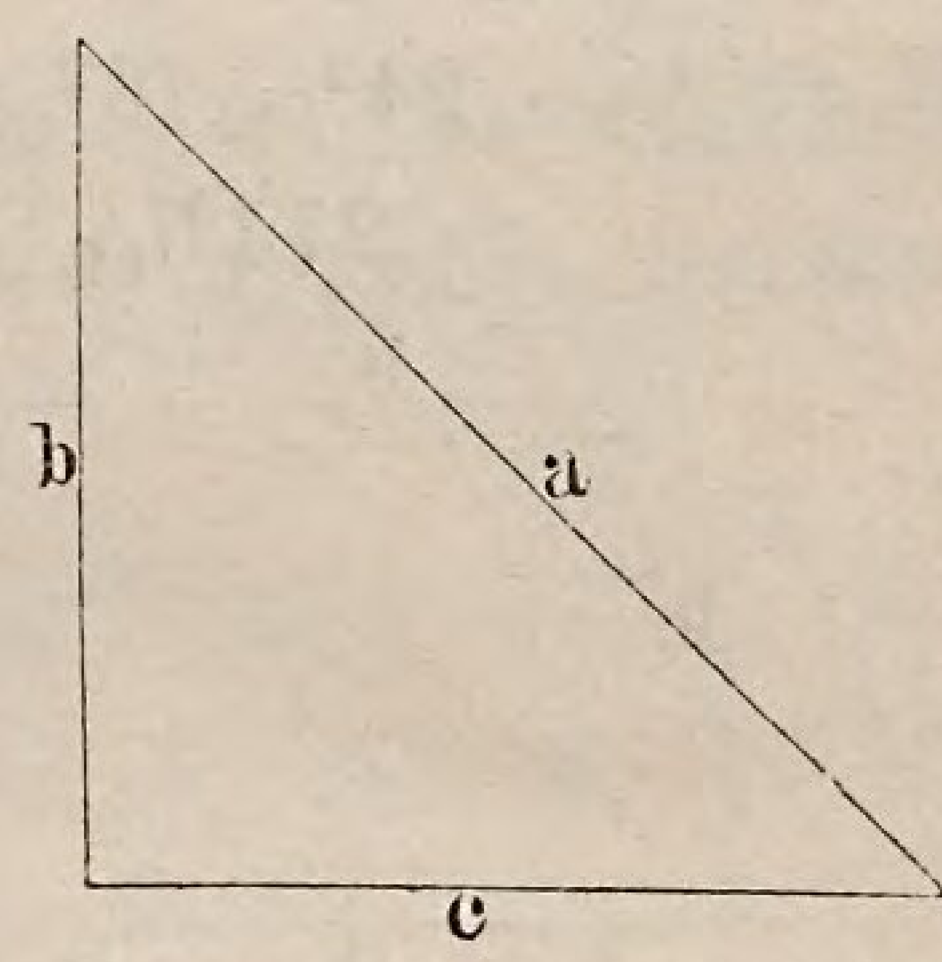
$a^2 = b^2 + c^2$, daraus $a = \sqrt{b^2 + c^2}$;

ferner

$b^2 = a^2 - c^2$, daraus $b = \sqrt{a^2 - c^2}$,

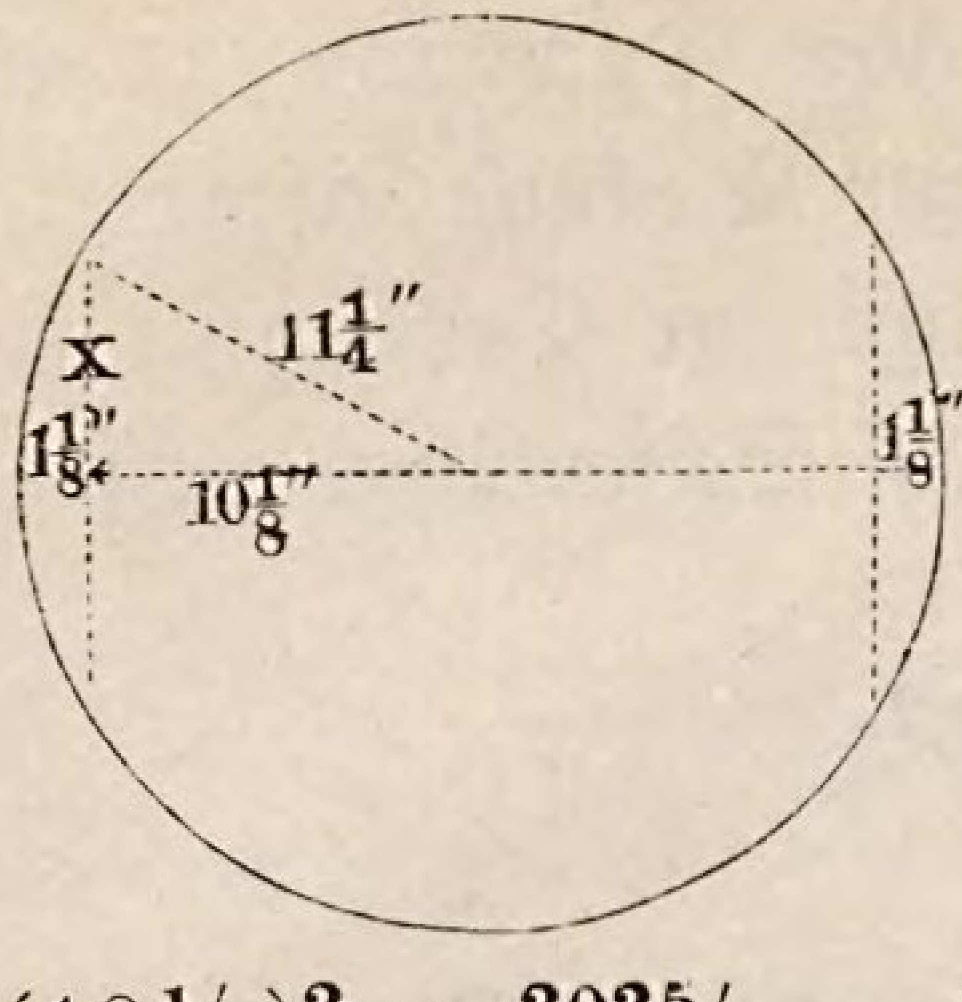
und

$c^2 = a^2 - b^2$, daraus $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.



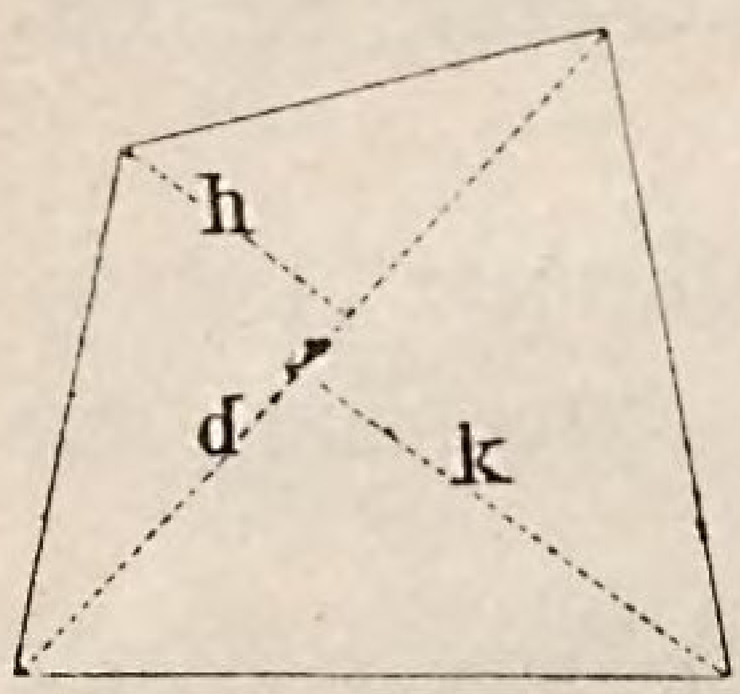
Wie groß ist die Länge eines Gratsparrens, wenn seine senkrechte Höhe = 20′ und seine Grundweite (horizontale Projection) 24′ beträgt?

Bezeichnet x die Länge des Sparrens, so ist $x^2 = 20^2 + 24^2 = 400 + 576 = 976$; $x = \sqrt{976} = 31{,}24'$ oder $31'\ 3''$ beinahe.



Ein runder Holzblock von $22^1/_2''$ Durchmesser verliere durch die beiderseitige Abschwartung $2^1/_4''$. Welche Breite werden die äußersten aus dem Blocke zu schneidenden Breter haben?

Bezeichnet x die halbe Breite des Bretes, so ist $x^2 = (11^1/_4)^2 - (10^1/_8)^2 = {}^{2025}/_{16} - {}^{6561}/_{64} = {}^{1539}/_{64}$; $x = \sqrt{{}^{1539}/_{64}} = {}^1/_8 \sqrt{1539} = {}^1/_8 \cdot 39,23 = 4,9''$; demnach die ganze Breite des Bretes $= 9,8'' = 9''\ 10'''$.

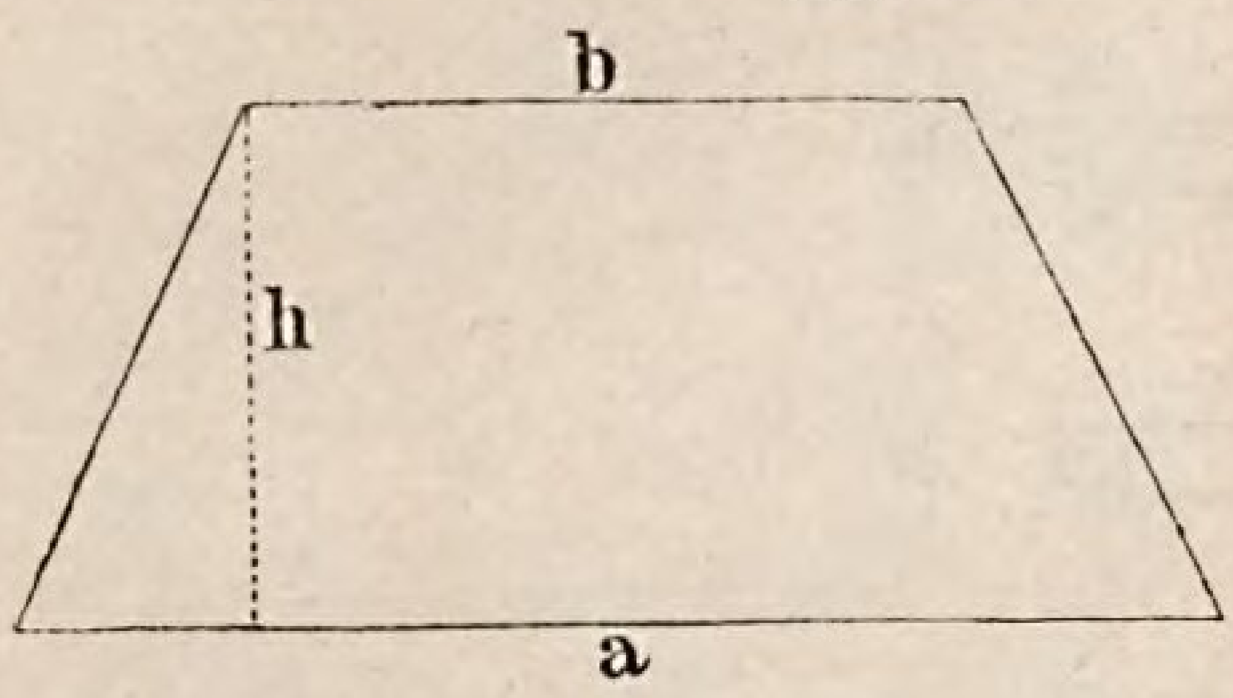


8. Der Flächeninhalt eines Vierecks, wenn eine Diagonale $= d$ und die Höhen $= h$ und k der dadurch gebildeten Dreiecke gegeben sind, beträgt

$$F = {}^1/_2 d\ (h + k).$$

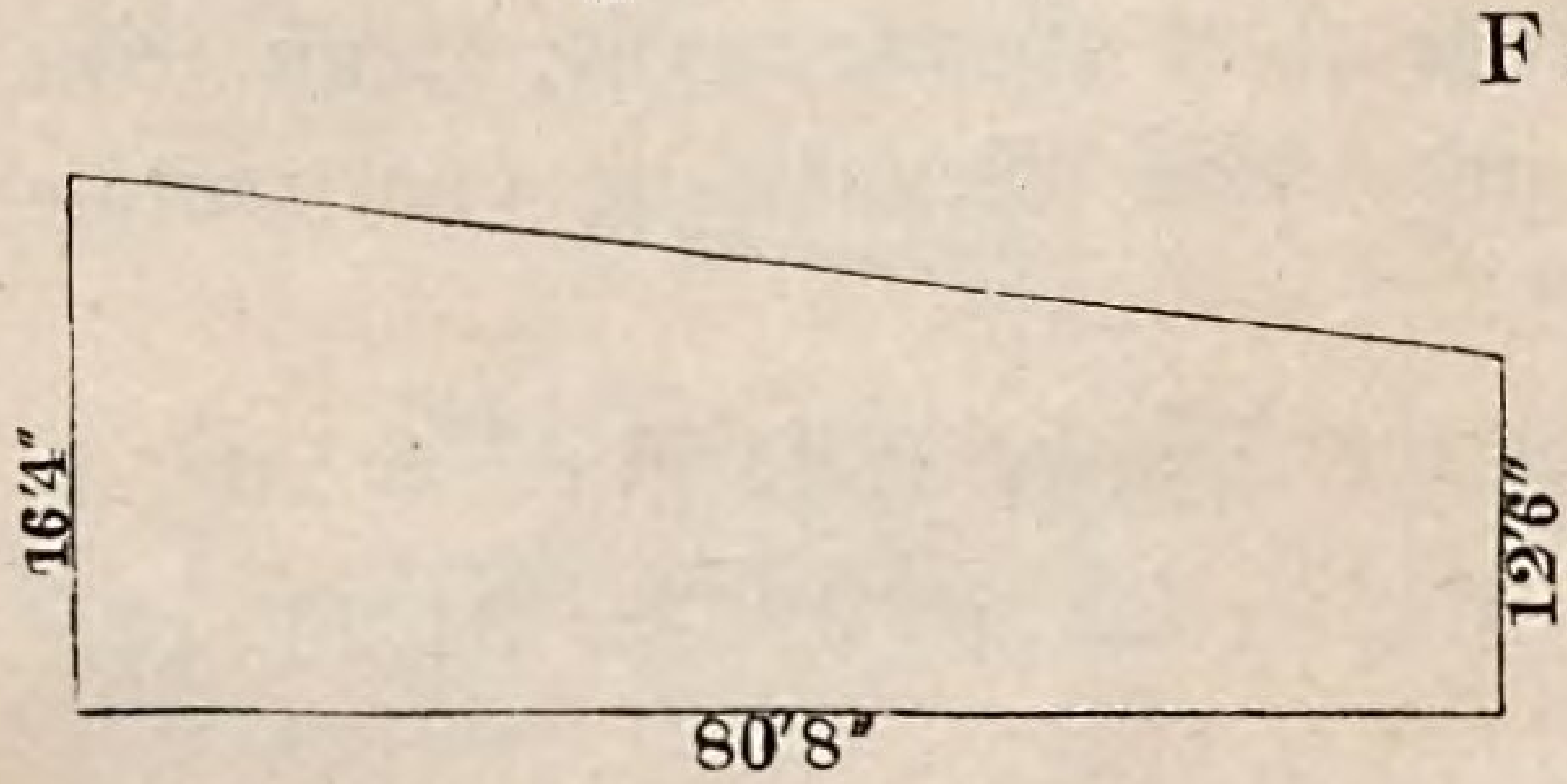
Für $d = 24'\ 8''$, $h = 6'\ 9''$, $k = 15'\ 6''$, ist

$$F = {}^1/_2 \cdot 24^2/_3\ (6^3/_4 + 15^1/_2) = {}^1/_2 \cdot 24^2/_3 \cdot 22^1/_4 = 274^5/_{12}\,\square' = 1\,\square^\circ\ 130^5/_{12}\,\square'.$$



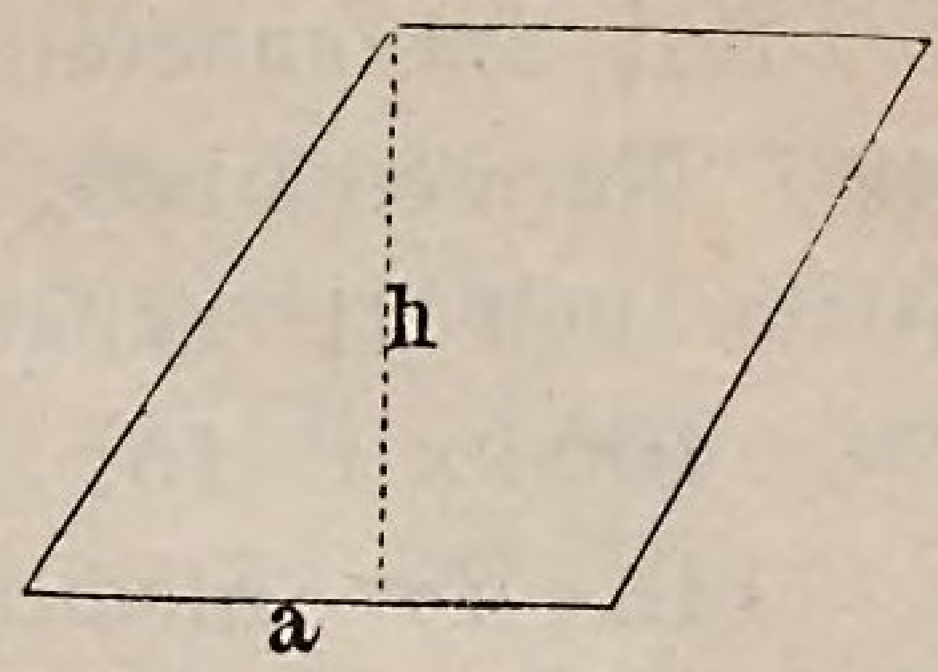
9. Der Flächeninhalt eines Trapezes, wenn die beiden parallelen Seiten $= a$ und b und die Höhe zwischen denselben $= h$ gegeben, ist

$$F = {}^1/_2\ (a + b)\ h.$$



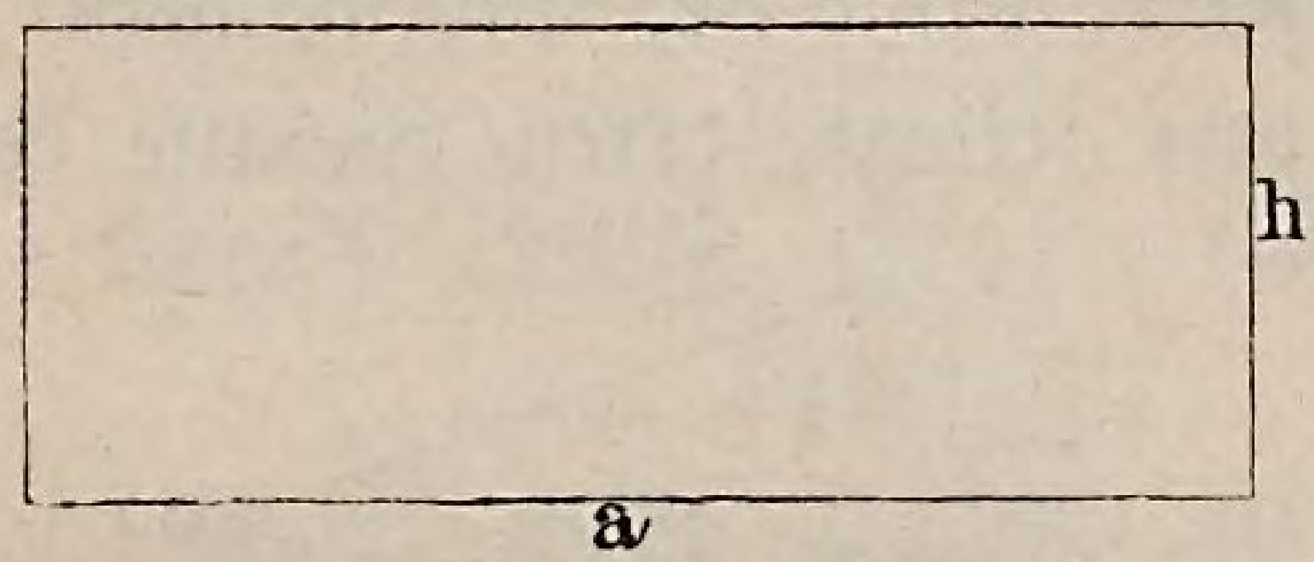
Eine Mauer sei an dem einen Ende $16'4''$, an dem andern $12'\ 6''$ hoch, die Länge betrage $80'\ 8''$; dann ist der

Inhalt einer der Mauerflächen $= \frac{1}{2}\ (16\frac{1}{3} + 12\frac{1}{2})\ 80\frac{2}{3}$ $= \frac{1}{2} \cdot 28\frac{5}{6} \cdot 80\frac{2}{3} = 1162\frac{17}{18}\square' = 8\square^{\circ}\ 10\frac{17}{18}\square'$.

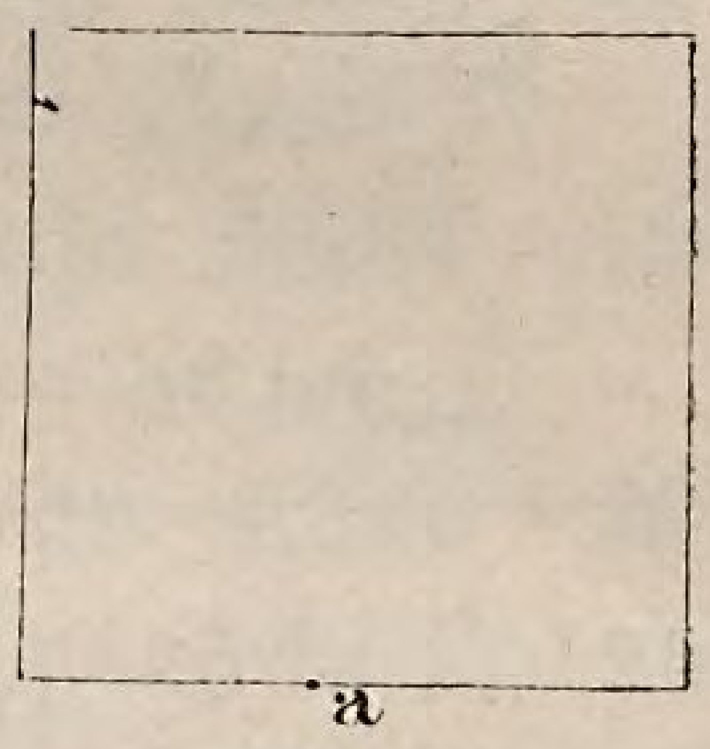


10. Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms, wenn die eine Seite $= a$ und die Höhe darauf $= h$ gegeben, ist

$$F = ah.$$



Hat ein Bauplatz eine Länge von 87′ 8″ und eine Tiefe von 79′ 6″, so ist dessen Inhalt $= 87\frac{2}{3} \cdot 79\frac{1}{2} = 6969\frac{1}{2}\square'$ $= 48\square^{\circ}\ 57\frac{1}{2}\square'$.

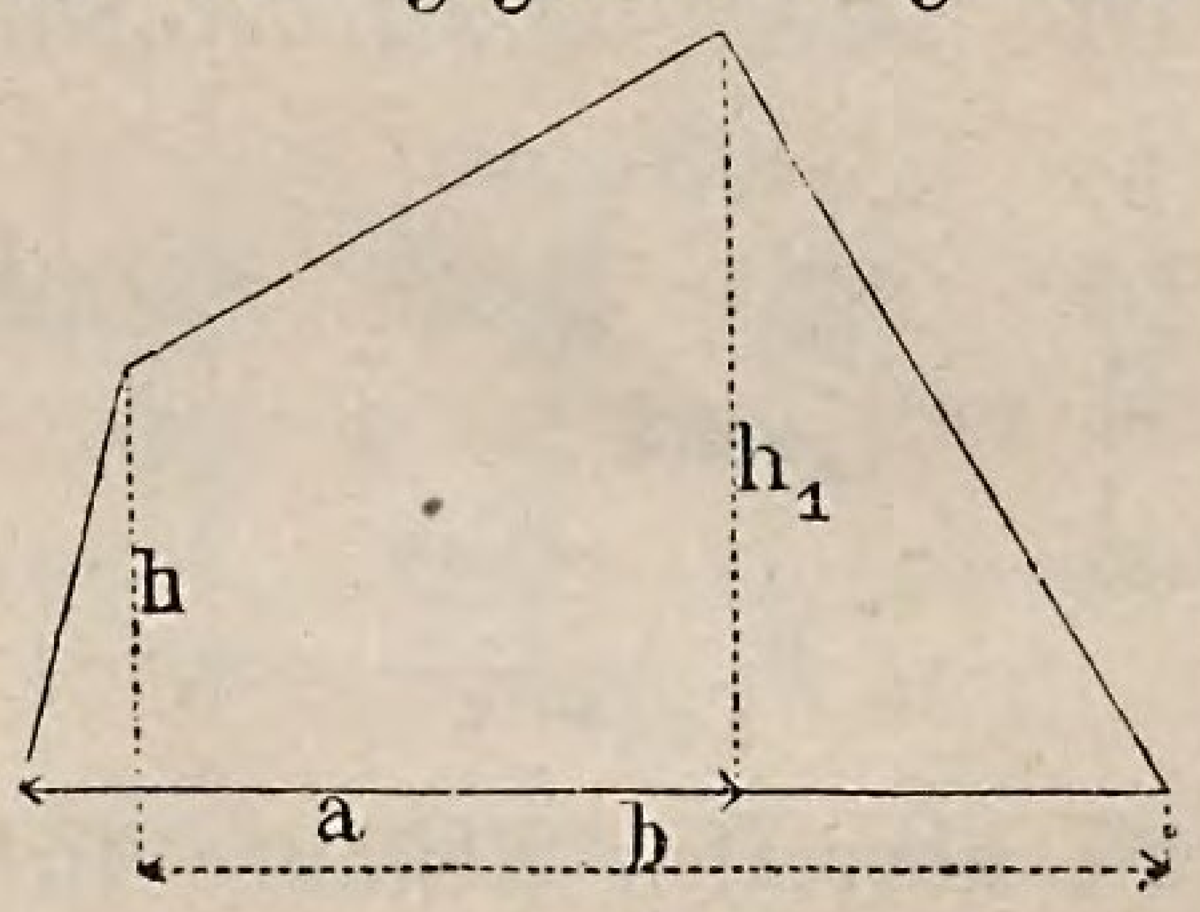


11. Der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seite a ist

$$F = a^2.$$

Ist $a = 6'\ 8''$, so ist $F = (6\frac{2}{3})^2 = \frac{20}{3} \cdot \frac{20}{3} = 44\frac{4}{9}\square' = 44\square'\ 64\square''$.

12. Sind in einem Vierecke die normalen Abstände der beiden Ecken einer Seite von der gegenüberliegenden Seite $= h$ und h_1 gegeben, auch die Abschnitte auf dieser Seite $= a$ und b, so ist der Inhalt des Vierecks



$$F = \frac{a \cdot h + b \cdot h_1}{2},$$

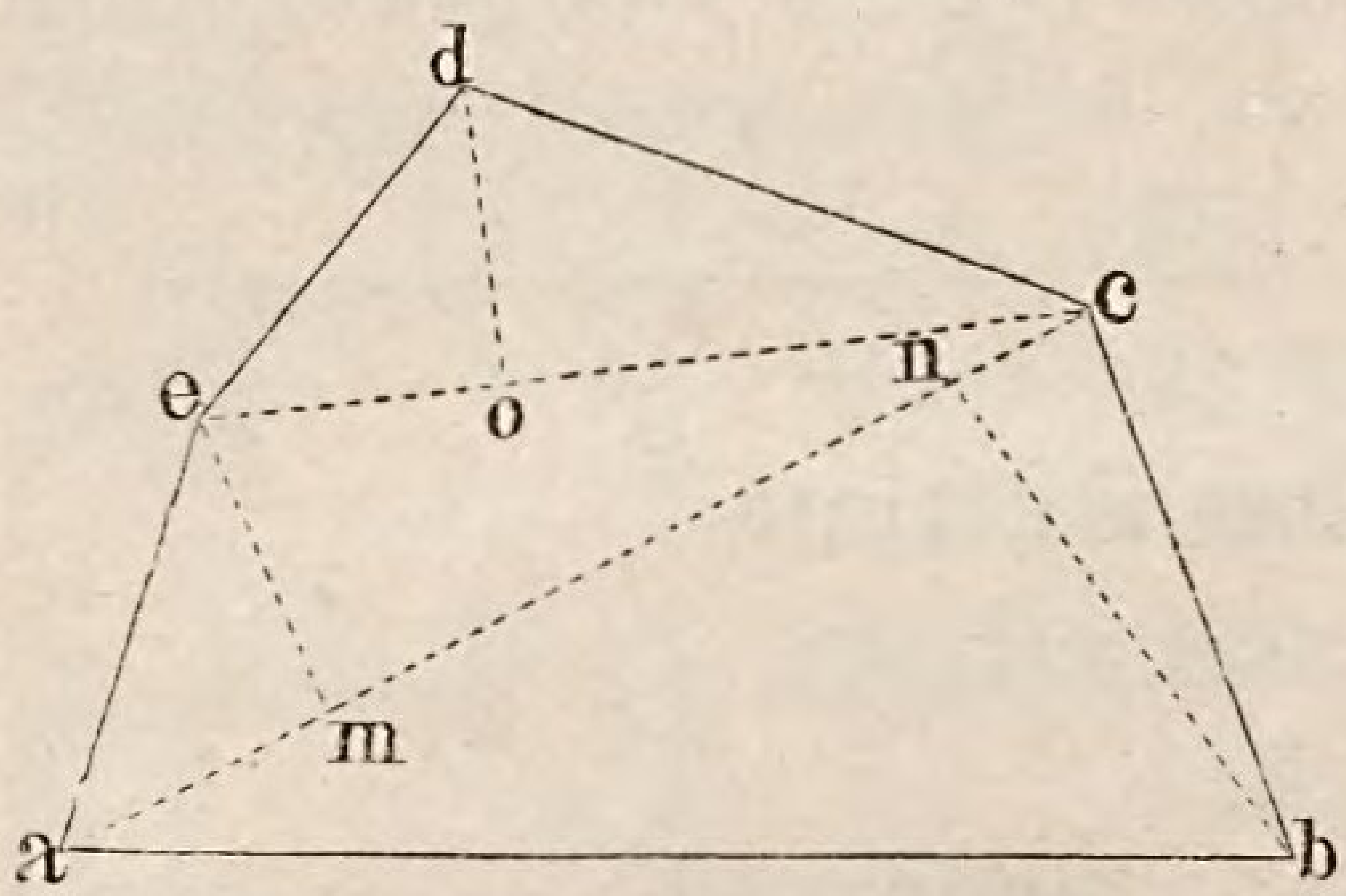
Ist $a = 19'\ 8''$, $b = 15'\ 9''$, $h = 9'\ 10''$, $h_1 = 14'\ 6''$, so ist $F = \frac{19\frac{2}{3} \cdot 9\frac{5}{6} + 15\frac{3}{4} \cdot 14\frac{1}{2}}{2} = \frac{30367}{144} = 210\frac{127}{144}\square' = 1\square^{\circ}\ 66\square'\ 127\square''$.

13. Die Inhalte ähnlicher Vier- und Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

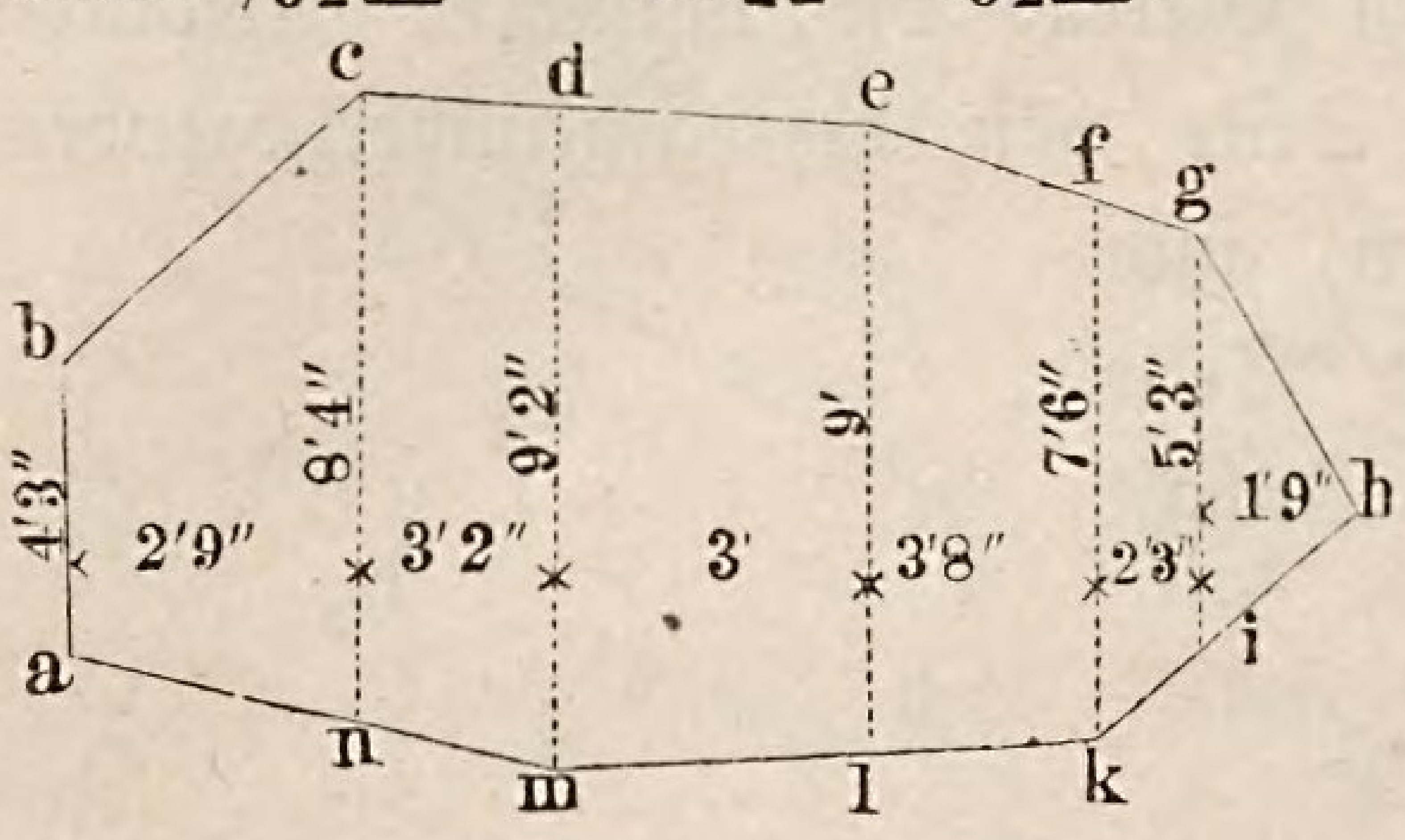
Auf eine quadratische Bodenfläche von 15′ Länge gehen 400 Marmorplatten, wie viel gehen auf eine quadratische Fläche von 21′ Länge?

$400 : x = 15^2 : 21^2$ und daraus $x = 784$ Stück.

14. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vielecks wird gefunden, indem man dasselbe in Dreiecke oder Trapeze zerlegt, deren Inhalte bestimmt und diese addirt.



Das nebenstehende Fünfeck stelle einen Bauplatz vor; es sei $ac = 62'\ 2''$, $ec = 59'\ 7''$, $bn = 45'\ 8''$, $em = 33'\ 4''$, $do = 28'\ 9''$, so ist $F = \frac{1}{2}\,(45\frac{2}{3} + 33\frac{1}{3})\ 62\frac{1}{6} + 59\frac{7}{12} \cdot 28\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 2455\frac{7}{12} + 856\frac{49}{96} = 3312\frac{3}{32}\,\square' = 23\,\square^\circ\ \frac{3}{32}\,\square'$.



Ist ferner in dem nebenstehenden, in Trapeze getheilten Achtecke $ab = 4'\ 3''$, $cn = 8'\ 4''$, $dm = 9'\ 2''$, $el = 9'$, $fk = 7'\ 6''$, $gi = 5'\ 3''$, und sind die normalen Abstände dieser Seiten $= 2'\ 9''$, $3'\ 2''$, $3'$, $3'\ 8''$, $2'\ 3''$, $1'\ 9''$, so ist

$$F = \tfrac{1}{2}\,(4\tfrac{1}{4} + 8\tfrac{1}{3})\ 2\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\,(8\tfrac{1}{3} + 9\tfrac{1}{6})\ 3\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\,(9\tfrac{1}{6} + 9)\ 3 + \tfrac{1}{2}\,(9 + 7\tfrac{1}{2})\ 3\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\,(7\tfrac{1}{2} + 5\tfrac{1}{4})\ 2\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot 5\tfrac{1}{4} \cdot 1\tfrac{3}{4} =$$

$\frac{1}{2}\,(12\frac{7}{12}\cdot 2\frac{3}{4} + 17\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{6} + 18\frac{1}{6}\cdot 3 + 16\frac{1}{2}\cdot$
$3\frac{2}{3} + 12\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{4} + 5\frac{1}{4}\cdot 1\frac{3}{4}) =$
$\frac{1}{2}\cdot 242\frac{43}{48} = 121\frac{43}{96}\square' = 121\square'\ 64\frac{1}{2}\square''$.

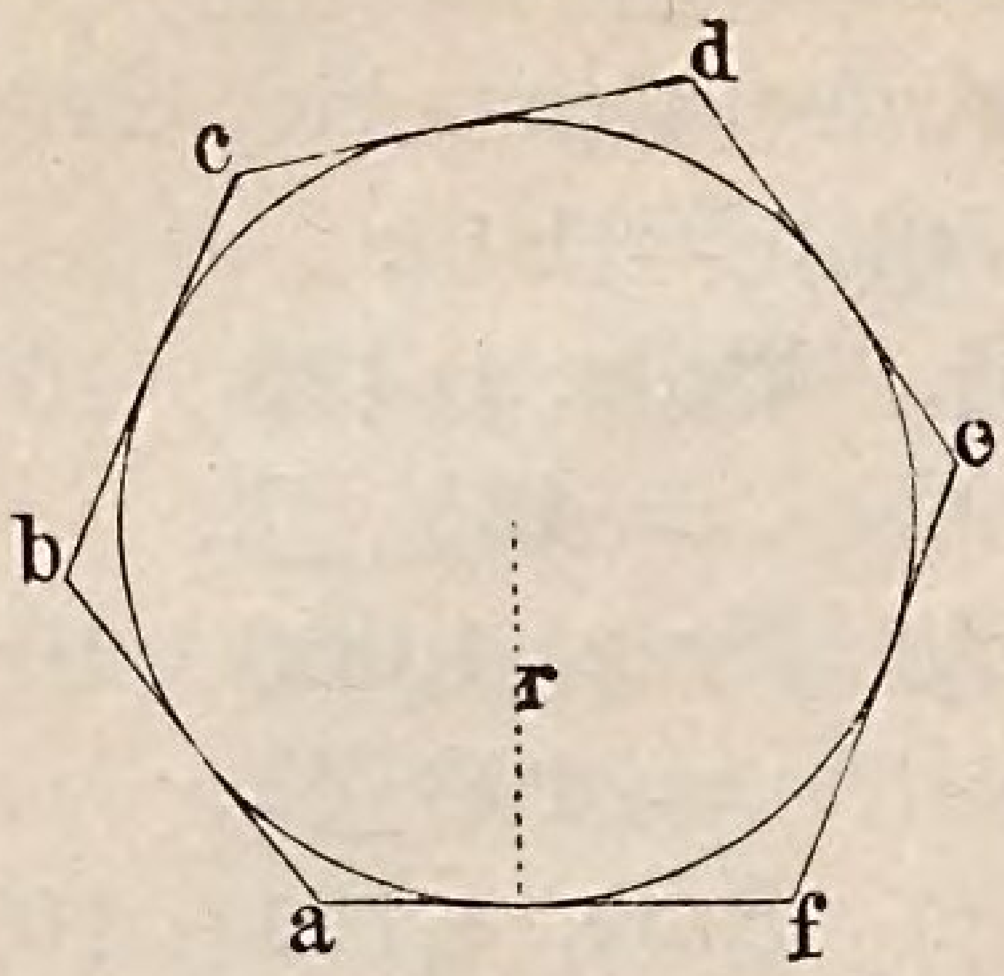
15. Inhalte regelmäßiger Vielecke, wenn die Seite $= a$ gegeben ist (in den Beispielen ist $a = 10'$):

F des reg. Dreiecks	$= 0{,}433a^2$.	Beisp. $0{,}433 \cdot 10^2 = 43\frac{1}{3}\square'$.
〃 〃 〃 Vierecks	$= 1{,}000a^2$.	Beisp. $1{,}000 \cdot 10^2 = 100\square'$.
〃 〃 〃 Fünfecks	$= 1{,}721a^2$.	Beisp. $1{,}721 \cdot 10^2 = 172{,}1\square'$.
〃 〃 〃 Sechsecks	$= 2{,}598a^2$.	Beisp. $2{,}598 \cdot 10^2 = 259{,}8\square'$.
〃 〃 〃 Siebenecks	$= 3{,}634a^2$.	Beisp. $3{,}634 \cdot 10^2 = 363{,}4\square'$.
〃 〃 〃 Achtecks	$= 4{,}828a^2$.	Beisp. $4{,}828 \cdot 10^2 = 482{,}8\square'$.
〃 〃 〃 Neunecks	$= 6{,}182a^2$.	Beisp. $6{,}182 \cdot 10^2 = 618{,}2\square'$.
〃 〃 〃 Zehnecks	$= 7{,}694a^2$.	Beisp. $7{,}694 \cdot 10^2 = 769{,}4\square'$.
〃 〃 〃 Elfecks	$= 9{,}360a^2$.	Beisp. $9{,}360 \cdot 10^2 = 936\square'$.
〃 〃 〃 Zwölfecks	$= 11{,}196a^2$.	Beisp. $11{,}196 \cdot 10^2 = 1119{,}6\square'$.
〃 〃 〃 Sechzehnecks	$= 20{,}109a^2$.	Beisp. $20{,}109 \cdot 10^2 = 2010{,}9\square'$.
〃 〃 〃 Zwanzigecks	$= 31{,}569a^2$.	Beisp. $31{,}569 \cdot 10^2 = 3156{,}9\square'$.

Ein Gebäude habe die Form eines regelmäßigen Zwölf=

ecks, dessen Seite 36′ $5^1/_4$″ lang ist, wie groß ist die Grundfläche?

$$11{,}196 \cdot (36^7/_{16})^2 = 14864{,}833\square'.$$



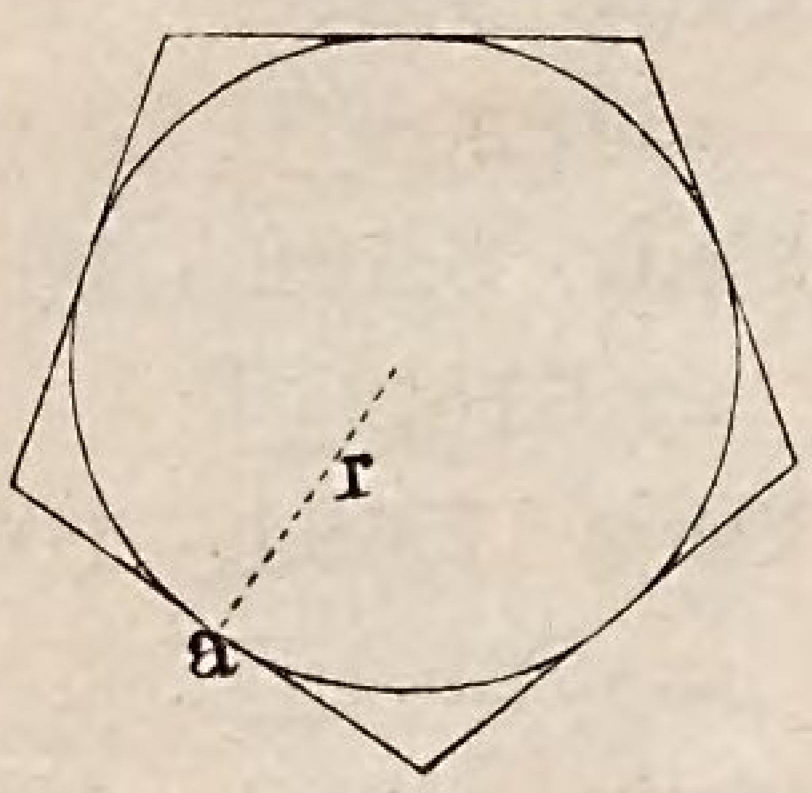
16. Der Flächeninhalt eines Vielecks, welches um einen Kreis liegt, und dessen Seiten = a, b, c... gegeben sind, ist, wenn r = dem Radius des Kreises,

$$F = \frac{a + b + c + \ldots.}{2} \cdot r.$$

Ist ab = 3′ 6″, bc = 5′ 3″, cd = 8, 2″, de = 7′ 4″, ef = 8′ 6″, fa = 6′ 8″ und r = 4′ 3″, so ist

$$F = \frac{3^1/_2 + 5^1/_4 + 8^1/_6 + 7^1/_3 + 8^1/_2 + 6^2/_3}{2} \cdot 4^1/_4$$

$$= {}^1/_2 \cdot 39^5/_{12} \cdot 4^1/_4 = 83^{93}/_{96}\square' = 83\square'\ 139^1/_2\square''.$$



17. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks mit der Anzahl der Seiten = n, dessen Seite = a gegeben, und welches um einen Kreis mit dem Radius = r liegt, ist

$$F = \frac{n \cdot a \cdot r}{2}.$$

Ist die Seite eines um einen Kreis liegenden regelmäßigen Fünfecks = 8′ 2″ und der Radius r = 5′ 6″, so ist

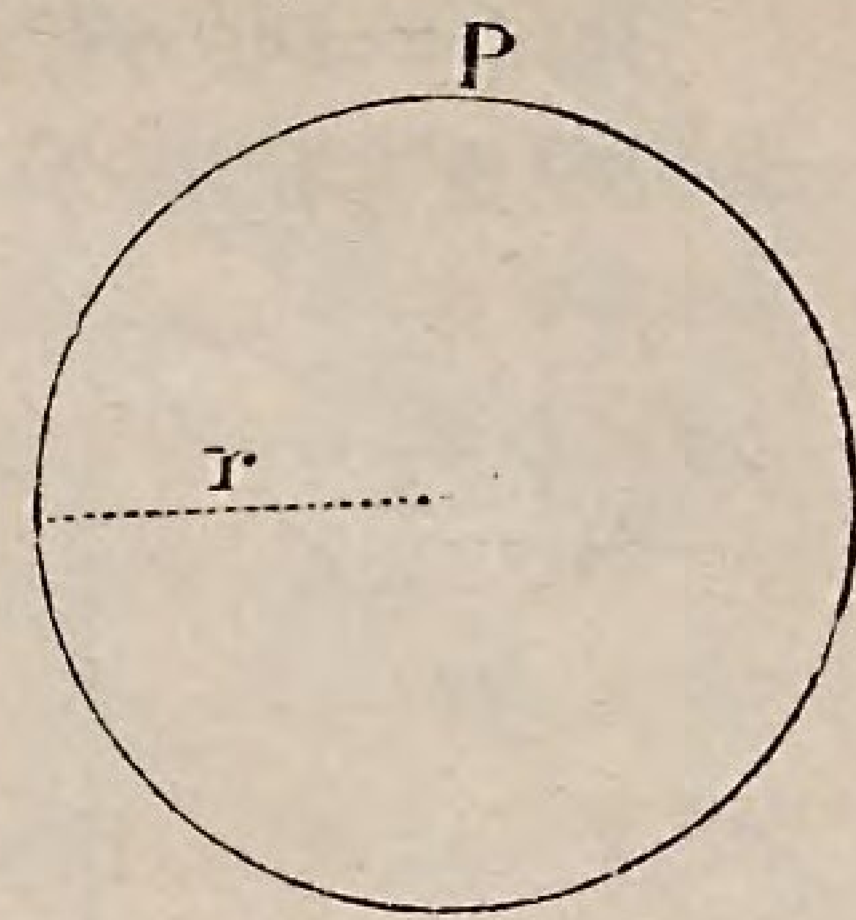
$$F = \frac{5 \cdot 8^1/_6 \cdot 5^1/_2}{2} = 112^7/_{24}\square' = 112=' \ 24\square''.$$

II. Krummlinige ebene Figuren.

18. Der Umfang (Peripherie) eines Kreises, dessen Radius $= r$, ist

$2 \pi r$; ($\pi = {}^{22}/_{7}$ oder 3,14);

ist der Durchmesser $= d$ gegeben, so ist der Umfang $= \pi d$.



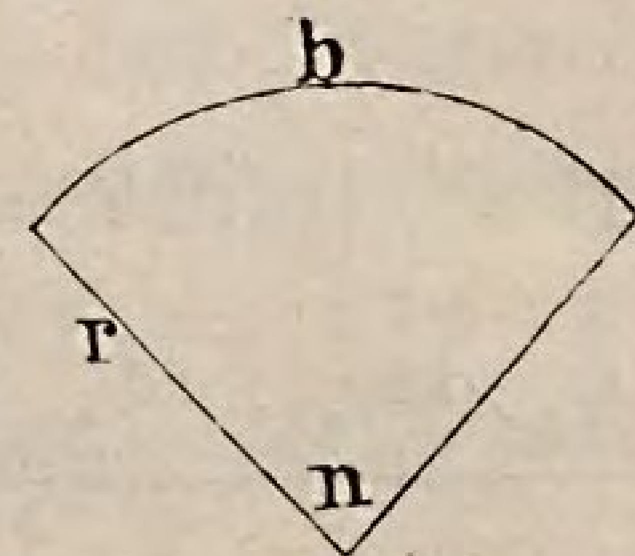
Ein großes kreisrundes Bassin von 43′ 8″ Durchmesser soll mit Ziegelsteinen gemauert werden. Wie viel Steine à $4^5/_6$″ Breite gehen auf den Umfang, wenn die Mörtelfuge $^1/_3$″ stark ist?

Der Umfang ist $= {}^{22}/_{7} \cdot 43^2/_3 \cdot 12''$; daher die Anzahl der Steine $= \dfrac{22 \cdot 131 \cdot 12}{7 \cdot 3 \cdot 5^1/_6} = 319$ Steine.

Ist der Radius $r = 5'\ 6''$, so ist der Umfang $= 2 \cdot {}^{22}/_{7} \cdot 5^1/_2 = 34^4/_7{}' = 34'\ 7''$.

19. Der Bogen b eines Kreises, wenn dessen Radius$=r$ ist und der zu dem Bogen gehörige Mittelpunktswinkel n Grad hat, ist

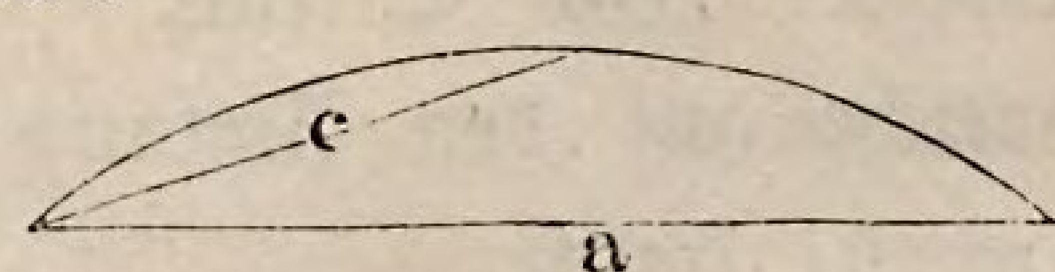
$$\frac{2 \pi r \cdot n}{360}.$$



Die Bogenlinie eines Gewölbes, welches mit einem Radius $= 7'\ 9''$ und einem Mittelpunktswinkel von 85 Grad construirt worden, ist

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 7^3/_4 \cdot 85}{360} = \frac{2 \cdot 22 \cdot 31 \cdot 85}{7 \cdot 4 \cdot 360} = 11'\ 6''.$$

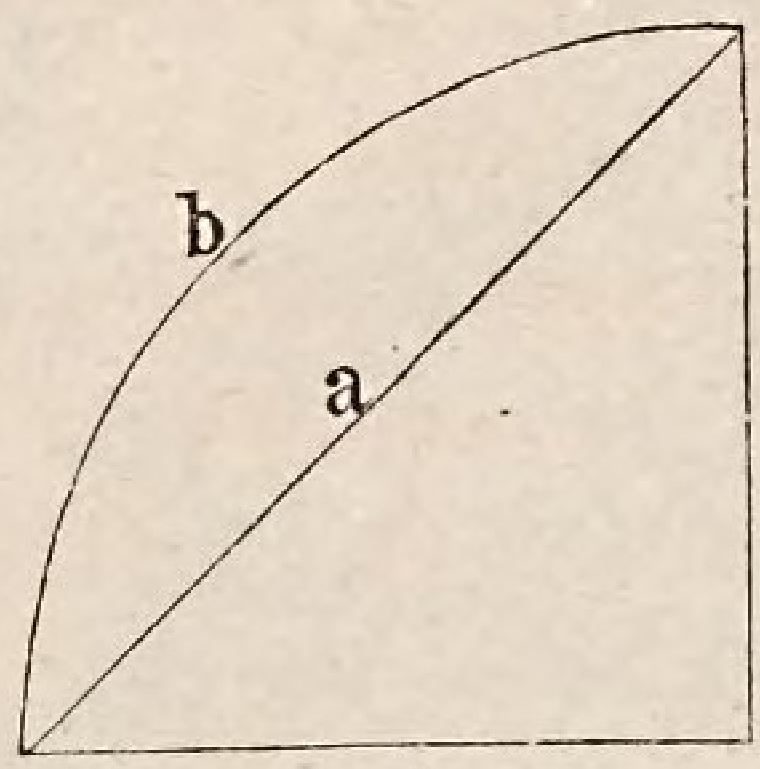
30. Ist die Sehne a des ganzen Bogens, und die Sehne c des



halben Bogens gegeben, so ist die Länge des Bogens selbst =

$$b = \frac{1}{3}\,(8c - a).$$

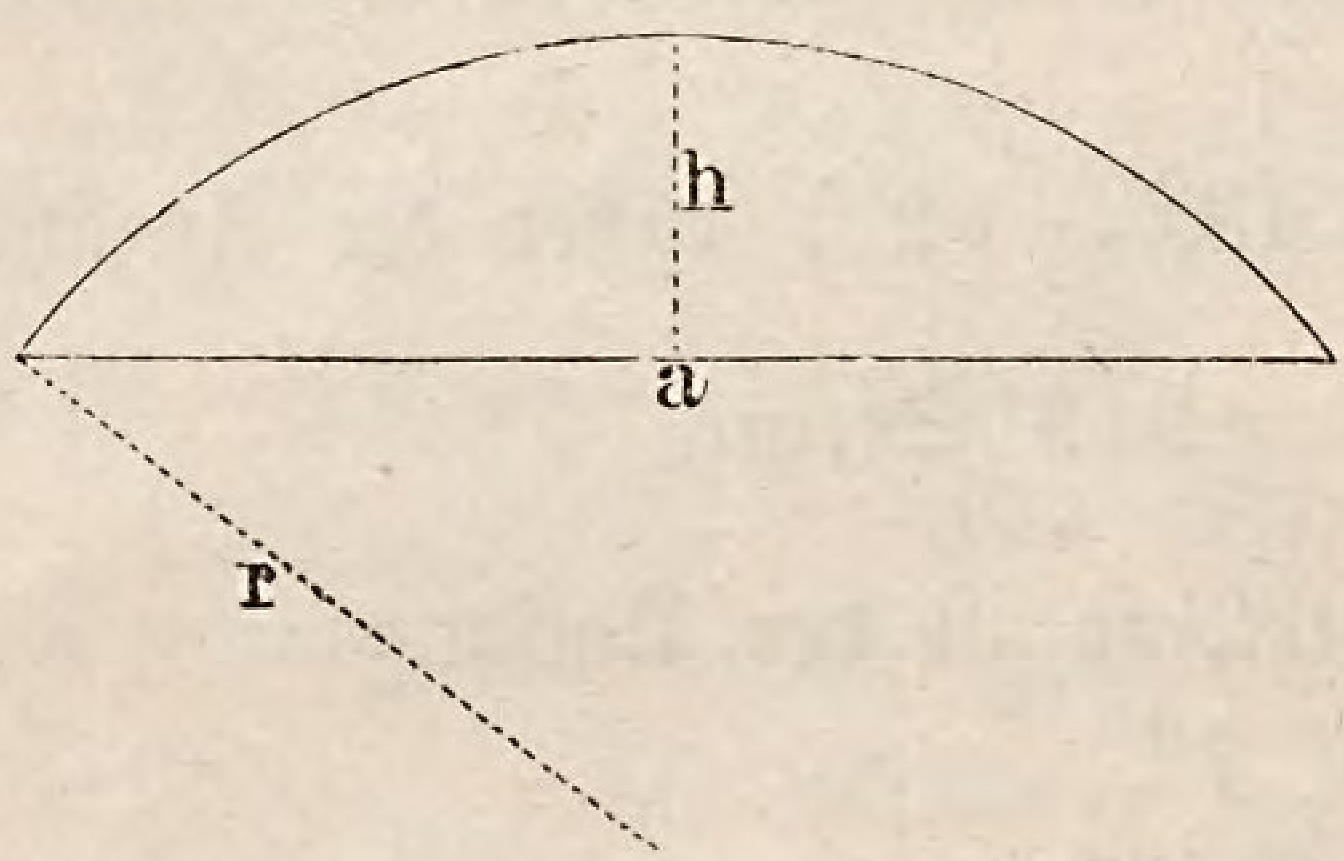
Ist $a = 10'\,8''$, $c = 6'\,6''$, so ist $b = \frac{1}{3}\,(8 \cdot 6\frac{1}{2} - 10\frac{2}{3}) = 13'\,9\frac{1}{3}''$.



21. Ist die Sehne eines Quadranten (der vierte Theil der Peripherie) = a gegeben, so ist der Bogen

$$b = \frac{10}{9}\,a.$$

Für $a = 9'\,4''$ ist $b = \frac{10}{9} \cdot 9\frac{1}{3} = 10'\,4\frac{4}{9}''$.



22. Ist die Sehne eines Kreisabschnittes = a, dessen Höhe = h, so ist der Radius des Kreises

$$r = \frac{\frac{1}{4}a^2 + h^2}{2h.}$$

Für $a = 5'\,4''$, $h = 1'\,8''$, so ist $r = \frac{\frac{1}{4} \cdot (5\frac{1}{3})^2 + (1\frac{2}{3})^2}{2 \cdot 1\frac{2}{3}} =$

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{16}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}}{2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{\frac{1}{9}\,(64 + 25)}{\frac{10}{3}} = \frac{89 \cdot 3}{9 \cdot 10} =$$

$2'\,11\frac{3}{5}''$.

23. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien.

Gehen auf den Umfang eines Bassins von 14′ Halbmesser 106 Steine, so findet man die Anzahl Steine, welche auf den Umfang eines Bassins von 18′ Halbmesser gehen, durch

106 : x = 14 : 18; daraus 14 x = 18 · 106 und x = 137 Steine.

24. Ist der Radius eines Kreises = r, so ist die Seite a des in den Kreis eingeschriebenen regelmäßigen

Dreiecks	= 1,732 r;	für r = 10′ ist	a = 17,32′
Vierecks	= 1,414 r;	= = = =	a = 14,14′
Fünfecks	= 1,176 r;	= = = =	a = 11,76′
Sechsecks	= 1,000 r;	= = = =	a = 10′
Siebenecks	= 0,868 r;	= = = =	a = 8,68′
Achtecks	= 0,765 r;	= = = =	a = 7,65′
Neunecks	= 0,684 r;	= = = =	a = 6,84′
Zehnecks	= 0,618 r;	= = = =	a = 6,18′
Elfecks	= 0,561 r;	= = = =	a = 5,61′
Zwölfecks	= 0,518 r;	= = = =	a = 5,18′
Sechzehnecks	= 0,390 r;	= = = =	a = 3,90′
Zwanzigecks	= 0,313 r;	= = = =	a = 3,13′.

Der Unterbau zum Thurme einer holländischen Windmühle sei achteckig und habe 39′ Durchmesser von einer Ecke zur andern. Wie groß ist der Umfang des Thurmes?

$r = 19\frac{1}{2}'$, daher die Seite des Achtecks $= 19\frac{1}{2} \cdot 0{,}765'$, und der Umfang $8 \cdot 19\frac{1}{2} \cdot 0{,}765 = 119{,}34'$, $= 119'\ 4''$.

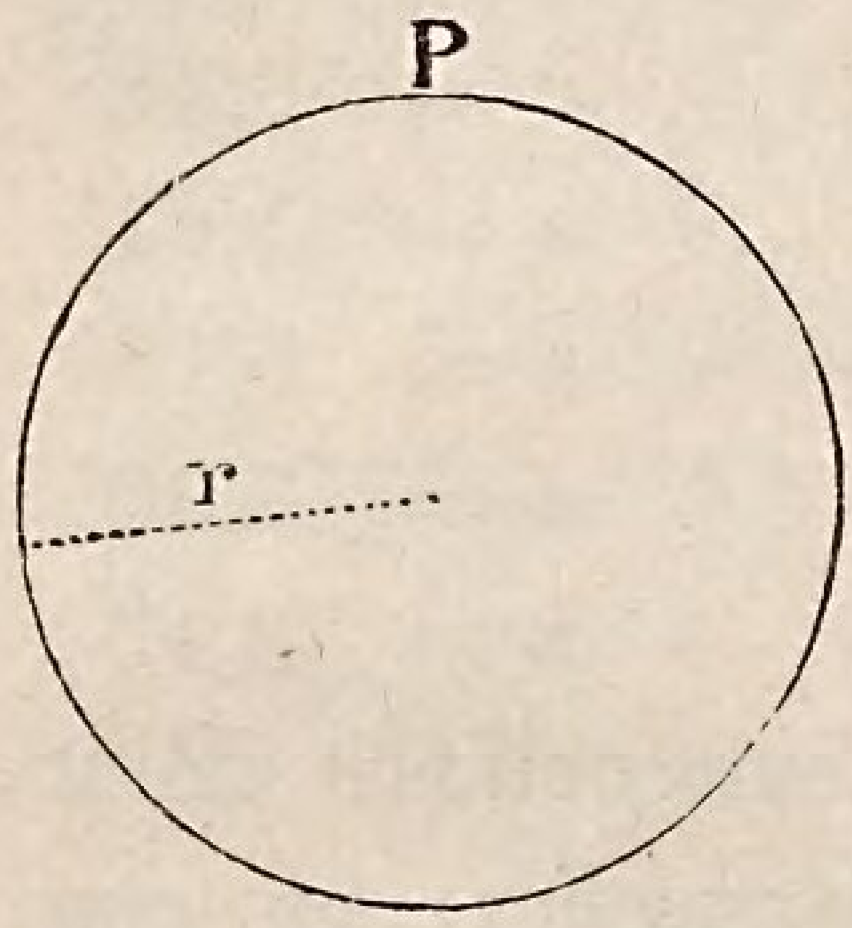
25. Ist die Seite a des regulären Polygons gegeben, so ist der Radius r des um das Polygon beschriebenen Kreises bei einem

Dreieck	= 0,577 a;	für a = 10′ ist	r = 5,77′
Viereck	= 0,707 a;	= = = =	r = 7,07′
Fünfeck	= 0,850 a;	= = = =	r = 8,50′
Sechseck	= 1,000 a;	= = = =	r = 10′
Siebeneck	= 1,152 a;	= = = =	r = 11,52′
Achteck	= 1,307 a;	= = = =	r = 13,07′

Neuneck	$= 1{,}462\ a$;	für $a = 10'$	ist		$r = 14{,}62'$
Zehneck	$= 1{,}618\ a$;	〃 〃	〃	〃	$r = 16{,}18'$
Elfeck	$= 1{,}782\ a$;	〃 〃	〃	〃	$r = 17{,}82'$
Zwölfeck	$= 1{,}931\ a$;	〃 〃	〃	〃	$r = 19{,}31'$
Sechzehneck	$= 2{,}564\ a$:	〃 〃	〃	〃	$r = 25{,}64'$
Zwanzigeck	$= 3{,}195\ a$;	〃 〃	〃	〃	$r = 31{,}95'$.

Aus einem runden Baumstamme sei ein regelmäßig 12eckiger Balken von 8″ Breite gehauen worden, wie groß war der Radius?

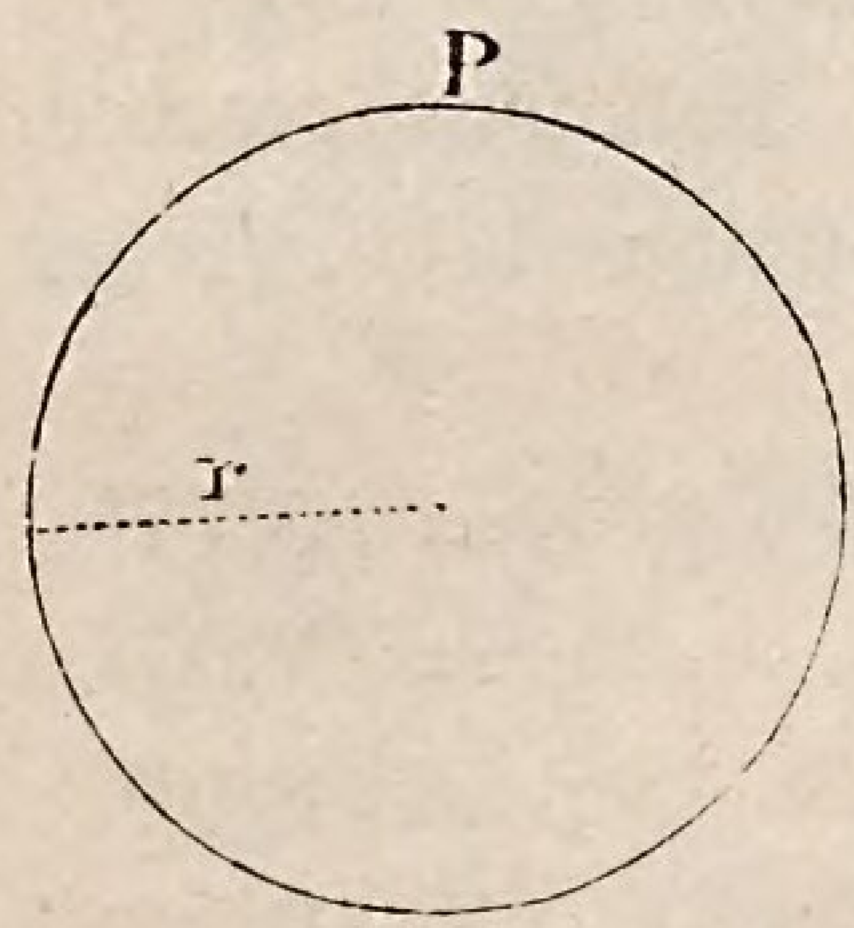
$$1{,}931 \cdot 8 = 15{,}4'' = 1'\ 3{,}4''.$$



26. Ist der Umfang eines Kreises $= P$ gegeben, so ist der Radius $r = \frac{P}{2\pi}$ und der Durchmesser $d = \frac{P}{\pi}$.

Der Umfang einer Ofenröhre sei $17^1/_4''$, wie groß ist der Durchmesser?

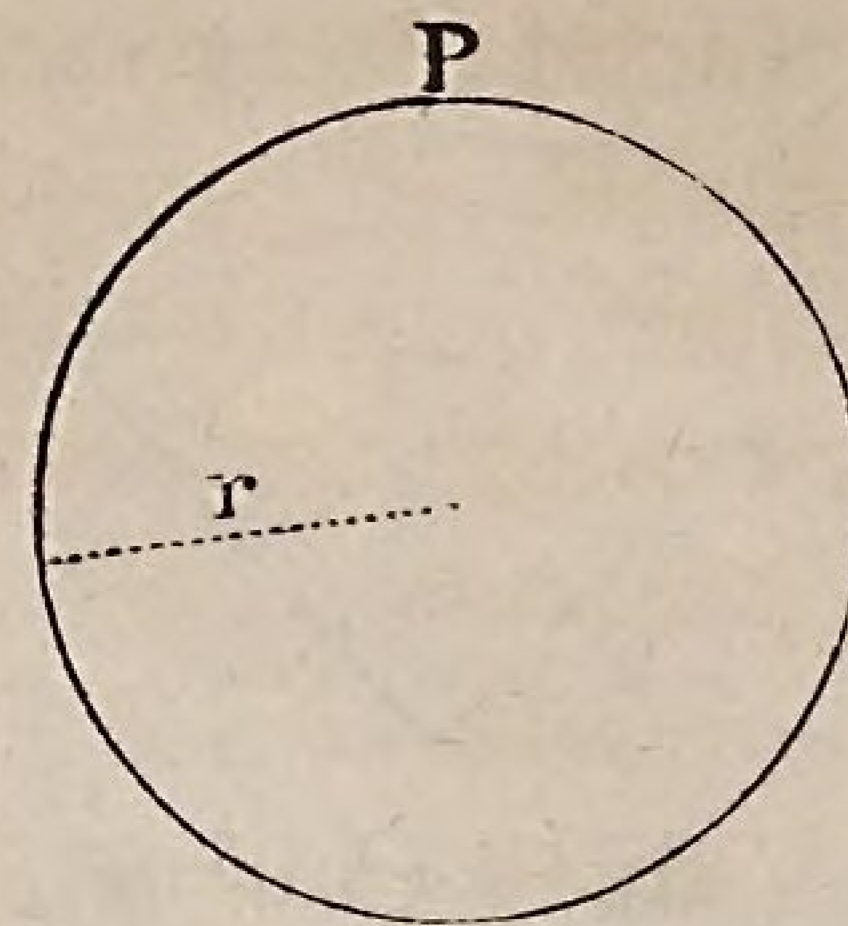
$$d = \frac{17^1/_4}{\pi} = \frac{17^1/_4}{3^1/_7} = \frac{69 \cdot 7}{4 \cdot 22} = 5''\ 6'''\ \text{beinahe}.$$



27. Der Inhalt eines Kreises, dessen Radius $= r$, ist πr^2.

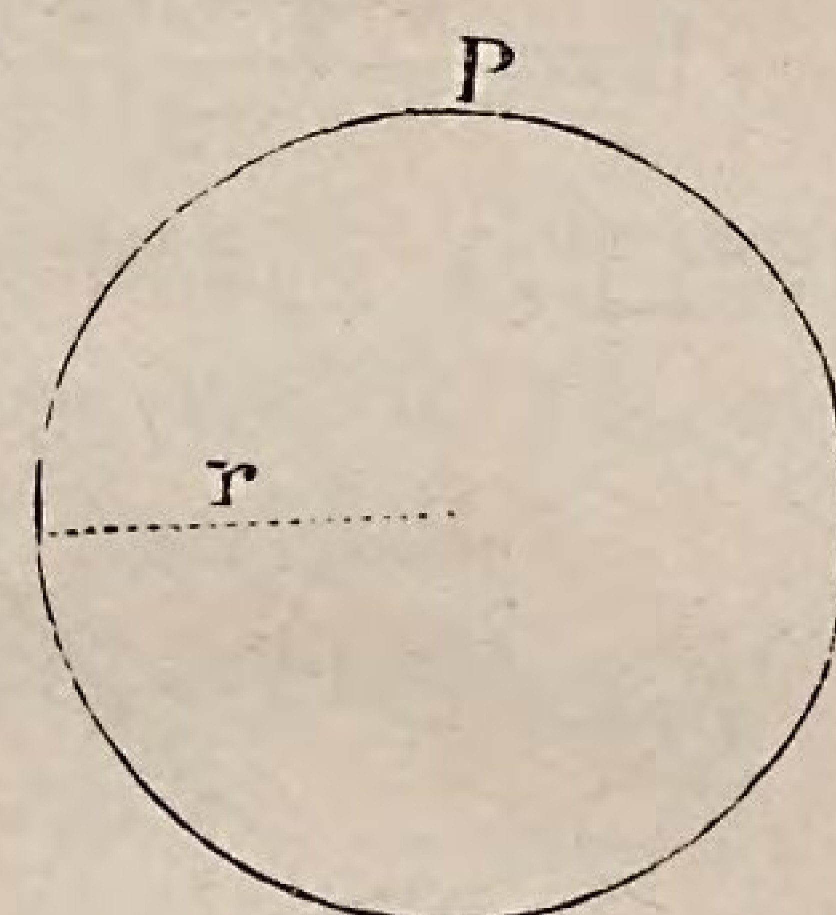
Für $r = 5'\ 10''$, ist $F = \pi\,(5^5/_6)^2$ $= \frac{22 \cdot 35 \cdot 35}{7 \cdot 6 \cdot 6} = 106\square'\ 136\square''$.

28. Der Inhalt eines Kreises, dessen Radius $= r$ und dessen Peripherie $= P$ gegeben, ist $= \frac{P \cdot r}{2}$.



Ein runder Baumstamm habe, mit der Schnur gemessen, 88″ Umfang und 28″ Durchmesser. Wie groß ist der Querschnitt?

$$F = \frac{88 \cdot 14}{2} = 616 \square'' = 4 \square' \; 40 \square''.$$



29. Der Inhalt eines Kreises, wenn nur die Peripherie $= P$ gegeben, ist $= \frac{P^2}{4\pi}$ oder $\frac{P^2}{12{,}56}$.

Ist der Umfang einer runden Säule $= 6' \; 7^1/_2''$, so ist der Querschnitt:

$$F = \frac{(6^5/_8)^2}{12{,}56} = 3 \square' \; 71^1/_5 \square''.$$

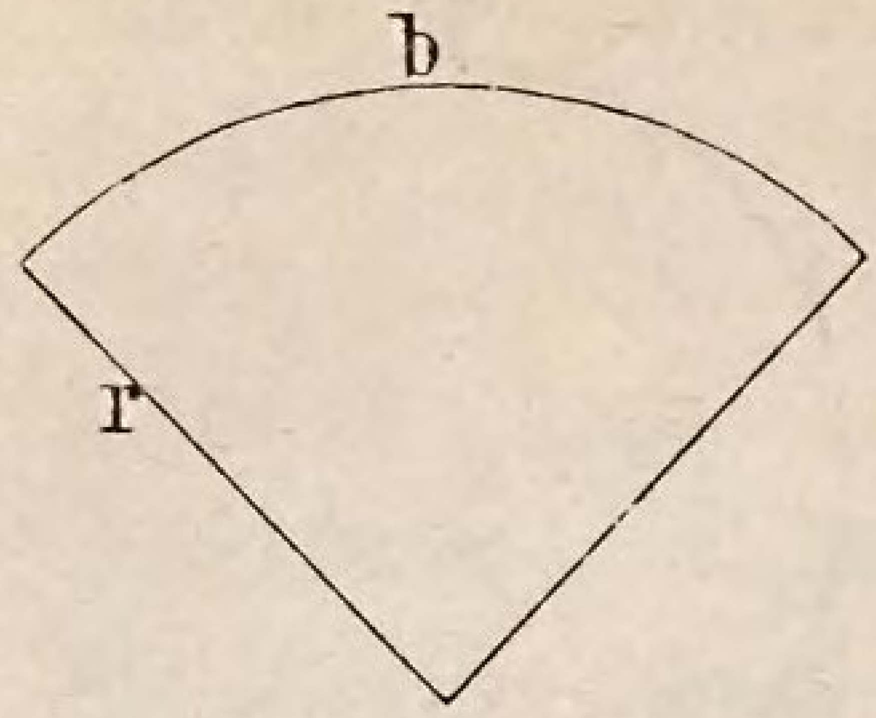
30. Die Inhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien, oder wie die Quadrate der Durchmesser, auch wie die Quadrate der Peripherien.

Hat eine runde Eisenstange $1^1/_2''$ Durchmesser, und wiegt der laufende Fuß 6 Pfd. 10 Loth, so findet man das Gewicht eines laufenden Fußes, wenn der Durchmesser $= 2^1/_2''$ ist, durch:

$6^1/_3 : x = (1^1/_2)^2 : (2^1/_2)^2$ oder $^9/_4 \; x = \frac{19 \cdot 25}{3 \cdot 4}$ und $x = 17$ Pfd. 18 Loth.

Ist der Umfang eines runden Holzklotzes $4^1/_2'$, und wiegt der laufende Fuß 70 Pfd. 25 Loth, so wiegt der laufende Fuß, wenn der Umfang $6^2/_3'$ mißt:

$70^5/_6 : x = (4^1/_2)^2 : (6^2/_3)^2$ oder $x = 155$ Pfd. 14 Loth.

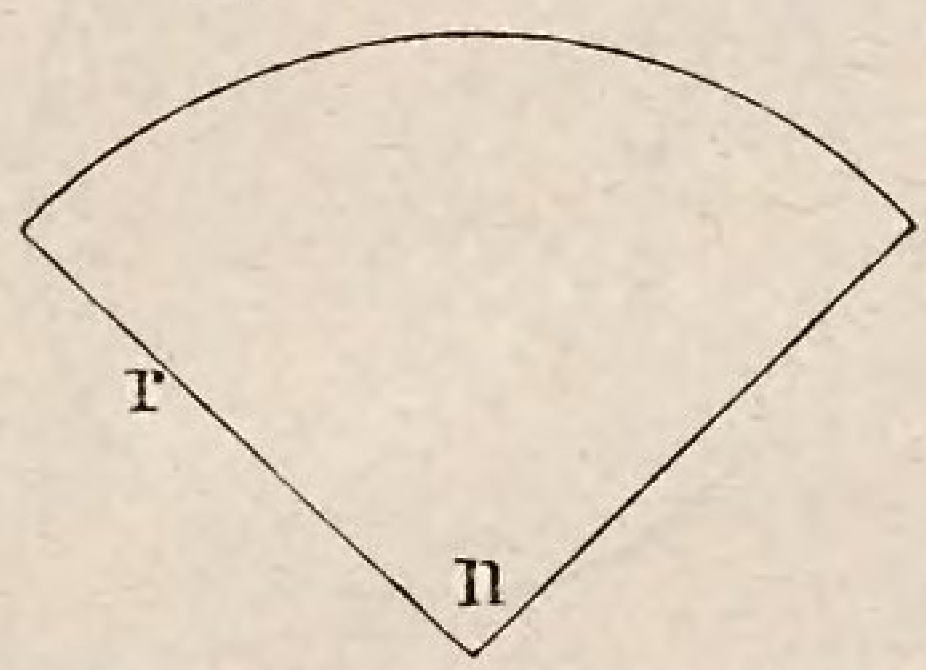


31. Der Inhalt eines Kreisausschnitts ist das halbe Product aus dem Bogen in den Radius. Ist der Radius $= r$, der Bogen $= b$, so ist

$$F = \frac{b\,r}{2}.$$

Ist $b = 9'\ 8''$, $r = 10'\ 9''$, so ist

$$F = \frac{9^2/_3 \cdot 10^3/_4}{2} = \frac{29 \cdot 43}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 51^{23}/_{24} \square' = 51 \square'\ 138 \square''.$$

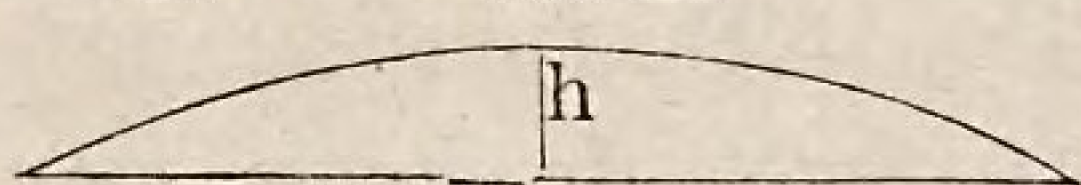


32. Ist der Mittelpunktswinkel n gegeben, so ist der Inhalt des Kreisausschnitts

$$F = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

Ist $r = 8'\ 4''$, $n = 65°$, so ist

$$F = \frac{\pi \cdot (8^1/_3)^2 \cdot 65}{360} = \frac{22 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 65}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 360} = 39 \square'\ 58^{38}/_{63} \square''.$$

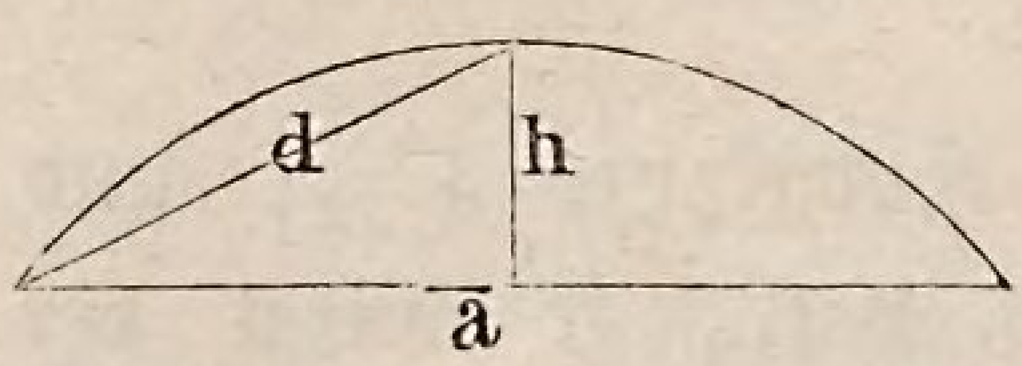


33. Der Flächeninhalt eines flachen Kreisabschnitts, wenn die Sehne a und die Höhe h gegeben sind, ist

$$F = {}^2/_3\, a \cdot h.$$

Ist $a = 9'\ 6''$, $h = 1'\ 3''$, so ist

$$F = {}^2/_3 \cdot 9^1/_2 \cdot 1^1/_4 = 7^{11}/_{12} \square' = 7 \square'\ 132 \square''.$$

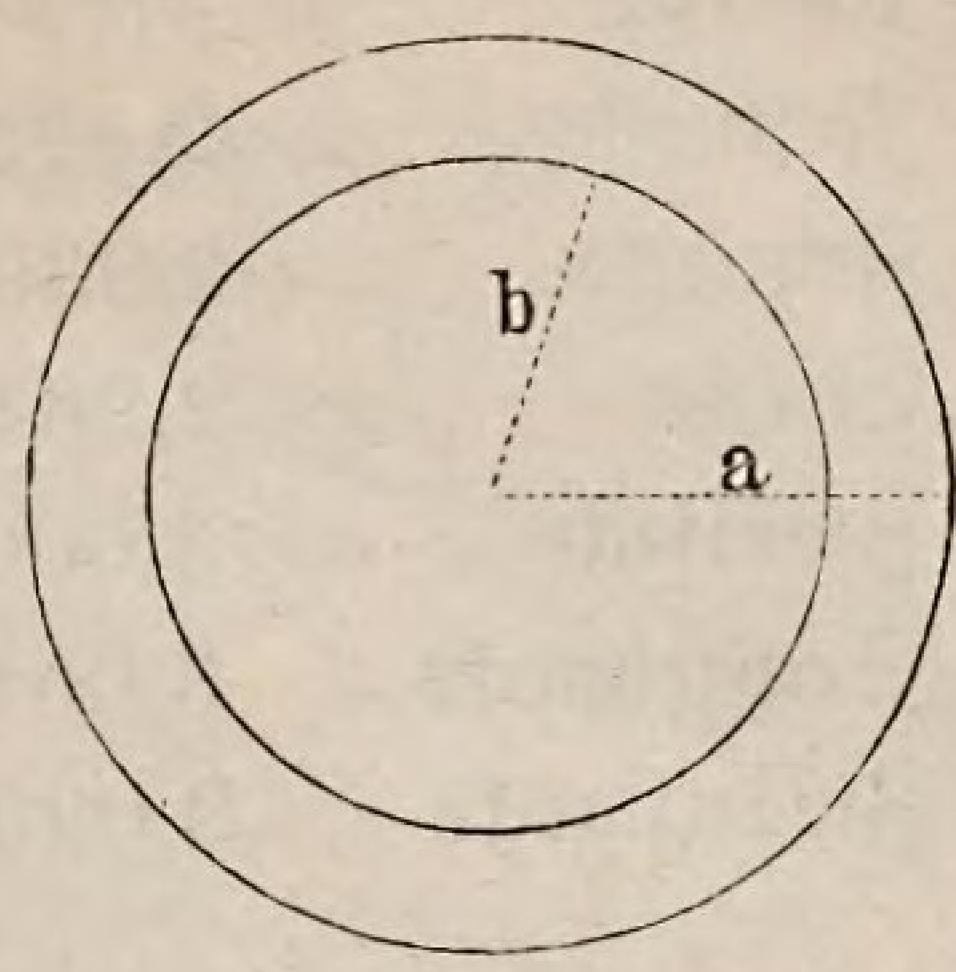


34. Ist die Sehne a, die Höhe h und die Sehne des halben Bogens d gegeben, so ist der Inhalt des Kreisabschnitts $F = 0{,}4 \cdot h\,(a + {}^4/_3\, d)$.

Ist $a = 10'\ 8''$, $h = 3'\ 3''$, $d = 6'\ 4''$, so ist

$$F = 0{,}4 \cdot 3\tfrac{1}{4}\,(10\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} \cdot 6\tfrac{1}{3}) = 24\square'\ 122\square''.$$

35. Der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn a und b die zugehörigen Radien sind, ist



$$F = \pi\,(a + b)\,(a - b).$$

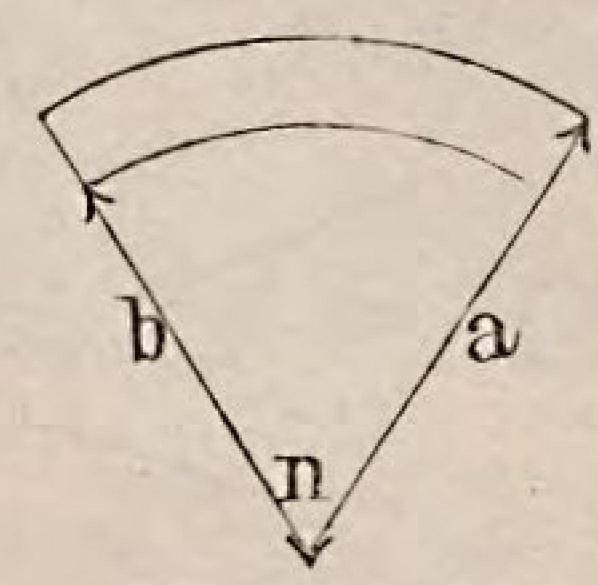
Um einen kreisrunden Grasplatz von 28′ Durchmesser geht ein Weg von 3′ Breite. Wie groß ist die Fläche des Wegs?

$$\tfrac{22}{7}\,(17 + 14)\,(17 - 14) = \tfrac{22}{7} \cdot 31 \cdot 3 = 292\square'\ 41\tfrac{1}{7}\square''.$$

Oder: Eine bleierne Röhre halte im Lichten 1″, die Dicke betrage $2\tfrac{1}{2}'''$. Wie groß ist der Querschnitt?

$$\tfrac{22}{7}\,(8\tfrac{1}{2} + 6)\,(8\tfrac{1}{2} - 6) = \tfrac{22}{7} \cdot 14\tfrac{1}{2} \cdot 2\tfrac{1}{2} = 113\tfrac{13}{24}\square'''.$$

36. Der Inhalt eines Ringstücks ergibt sich aus den Halbmessern a und b und dem Mittelpunktswinkel n durch die Formel:



$$F = \frac{\pi \cdot n}{360}\,(a + b)\,(a - b).$$

Von der Stirnfläche eines Gewölbes mißt der innere Halbmesser $8\tfrac{1}{2}'$, die Dicke 16″ und der Mittelpunktswinkel 85°, wie groß ist der Inhalt der Fläche?

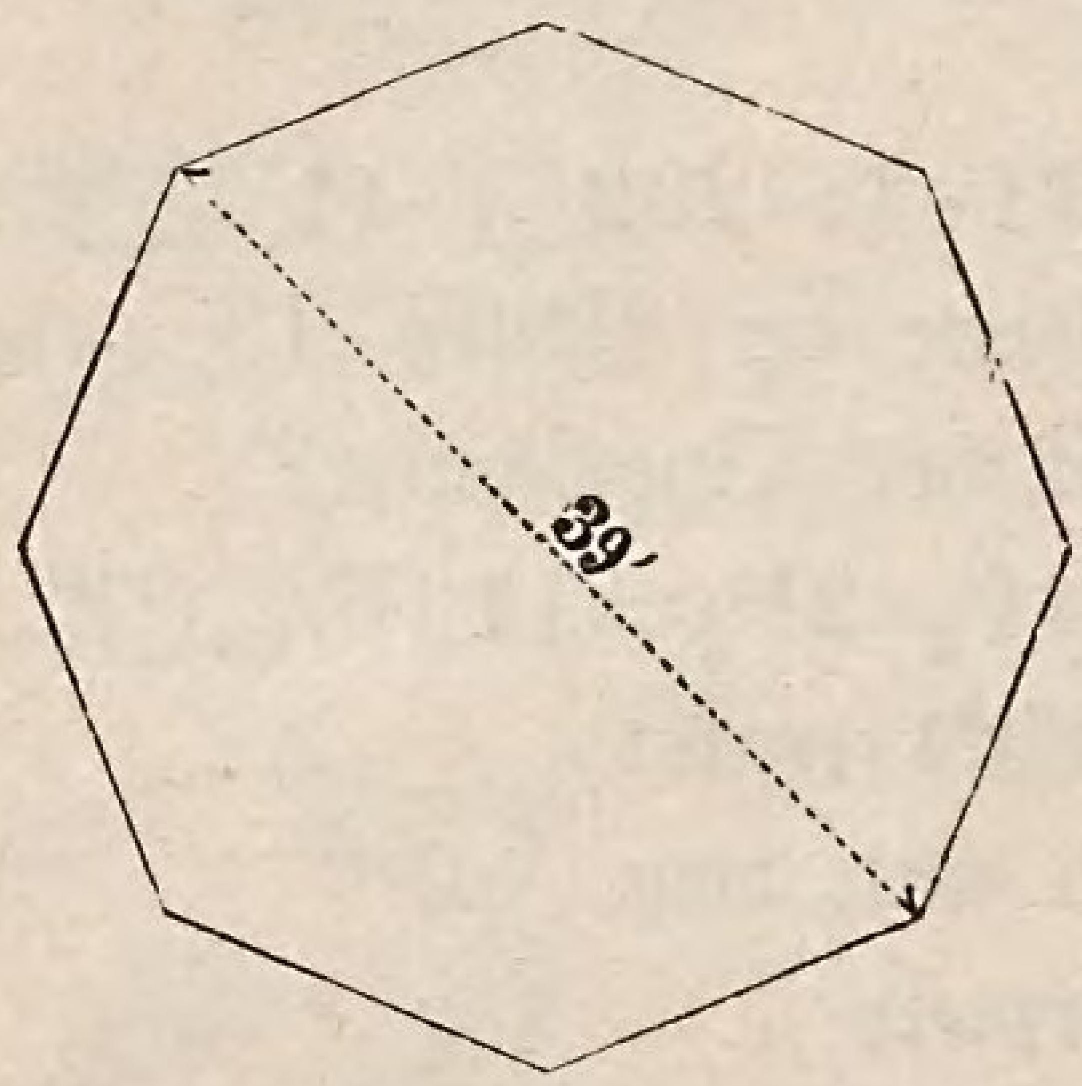
$$F = \frac{\pi \cdot 85}{360}\,(9\tfrac{5}{6} + 8\tfrac{1}{2})\,(9\tfrac{5}{6} - 8\tfrac{1}{2}) = \frac{22 \cdot 85 \cdot 55 \cdot 4}{7 \cdot 360 \cdot 3 \cdot 3} =$$

$18\square'\ 20\square''$.

37. Ist der Radius eines Kreises = r, so ist der Inhalt des in den Kreis eingeschriebenen regelmäßigen

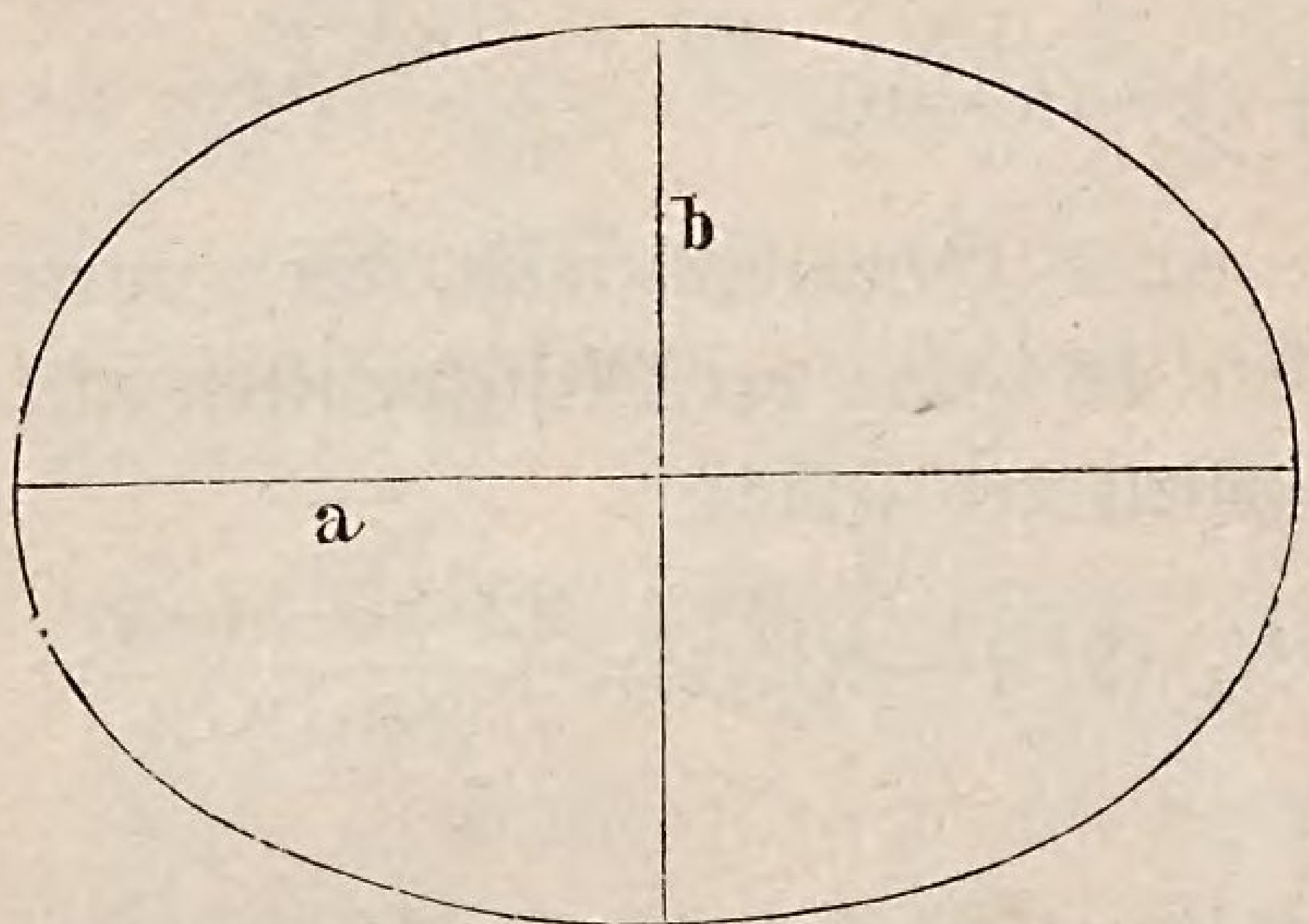
Dreiecks	$= 1{,}299\,r^2$;	für r = 10 ist	$F = 129{,}9\square'$
Vierecks	$= 2{,}000\,r^2$;	" " " "	$F = 200\square'$
Fünfecks	$= 2{,}378\,r^2$;	" " " "	$F = 237{,}8\square'$
Sechsecks	$= 2{,}598\,r^2$;	" " " "	$F = 259{,}8\square'$

Siebenecks	$= 2{,}736\ r^2$;	für $r = 10'$ ist	$F = 273{,}6$ □′
Achtecks	$= 2{,}828\ r^2$;	" " " "	$F = 282{,}8$ "
Neunecks	$= 2{,}892\ r^2$;	" " " "	$F = 289{,}2$ "
Zehnecks	$= 2{,}939\ r^2$;	" " " "	$F = 293{,}9$ "
Elfecks	$= 2{,}961\ r^2$;	" " " "	$F = 296{,}1$ "
Zwölfecks	$= 3{,}000\ r^2$;	" " " "	$F = 300$ "
Sechzehnecks	$= 3{,}061\ r^2$;	" " " "	$F = 306{,}1$ "
Zwanzigecks	$= 3{,}090\ r^2$;	" " " "	$F = 309$ "



Der Unterbau zum Thurme einer Windmühle sei achteckig und habe 39′ Durchmesser von einer Ecke zur andern. Wie groß ist der Querschnitt?

$2{,}828 \cdot (19^1/_2)^2 = 1075{,}347$ □′ $= 1075$ □′ 50 □″.



38. Der Umfang einer Ellipse, wenn die halben Achsen a und b sind, ist =

$1{,}99 \cdot \pi \sqrt{1/_2 (a^2 + b^2)}$.

Ist $a = 8'\ 7''$, $b = 5'\ 3''$, so ist der Umfang =

$1{,}99 \cdot 3{,}14 \sqrt{1/_2[(8^7/_{12})^2 + (5^1/_4)^2]} = 44'\ 5{,}4''$.

39. Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den halben Achsen a und b ist

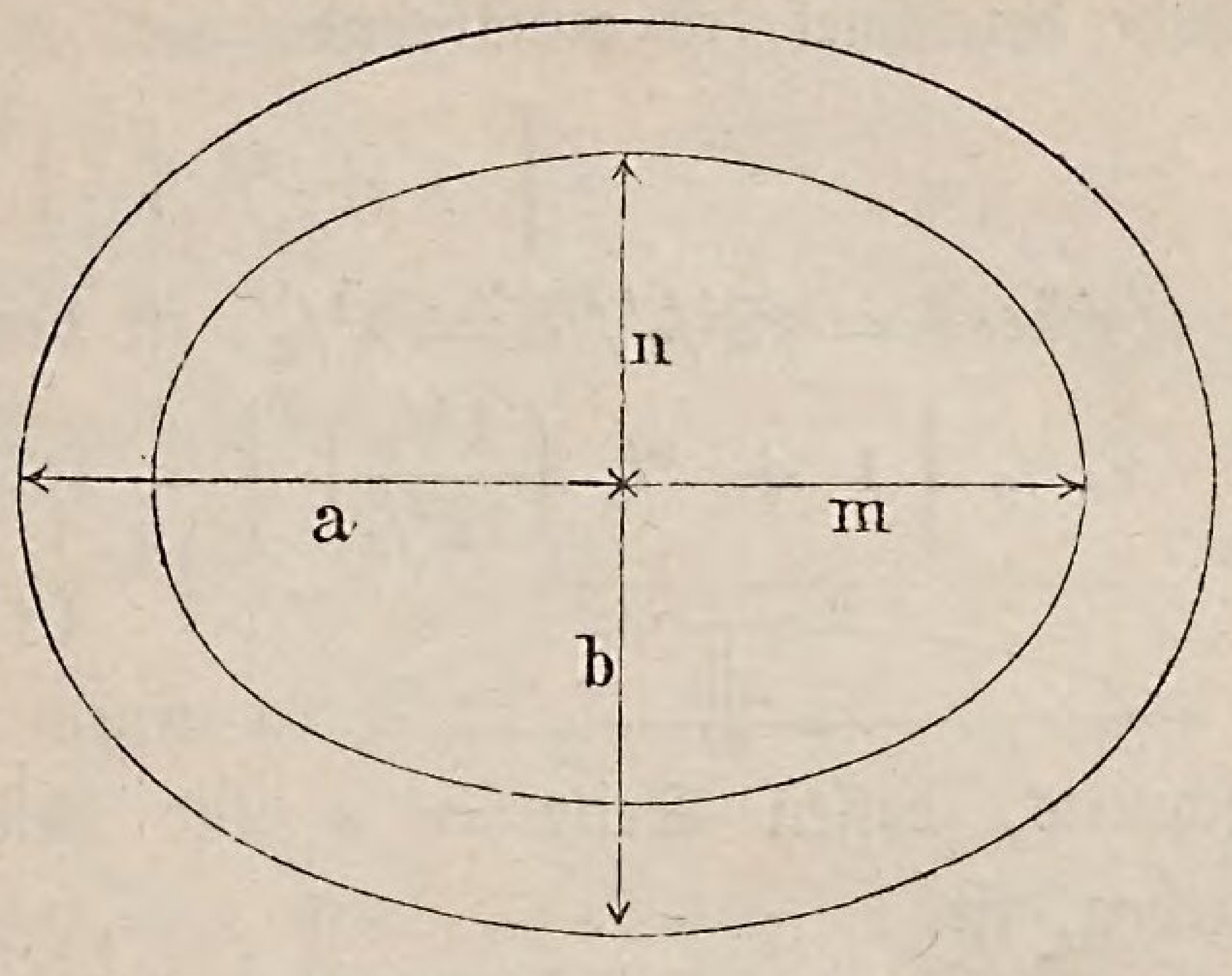
$$F = \pi \cdot ab.$$

Ein Gebäude habe als Basis die Form einer Ellipse

von 464′ Länge und 367′ Breite. Wie groß ist der Inhalt der Grundfläche?

$$3{,}14 \cdot 232 \cdot 183\frac{1}{2} = 133776{,}08\square'.$$

40. Der Flächeninhalt eines elliptischen Ringes, wenn die Achsen der äußern Ellipse = a und b, und der innern Ellipse = m und n gegeben sind, ist:

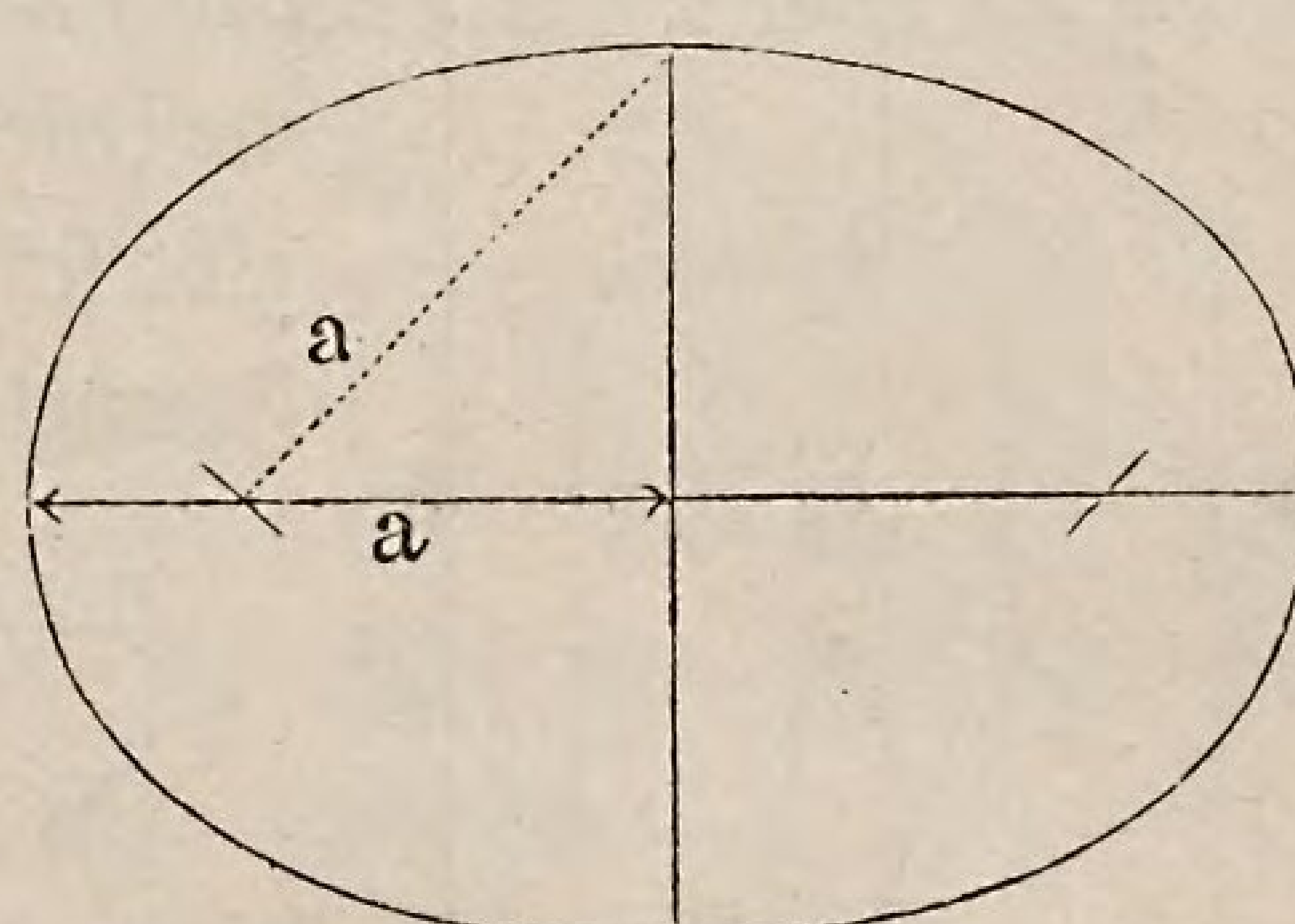


$$F = \pi\,(ab - mn).$$

Sind die äußern Achsen 3′ 10″ und 2′ 9″ und die innern Achsen um 9″ kürzer, so ist

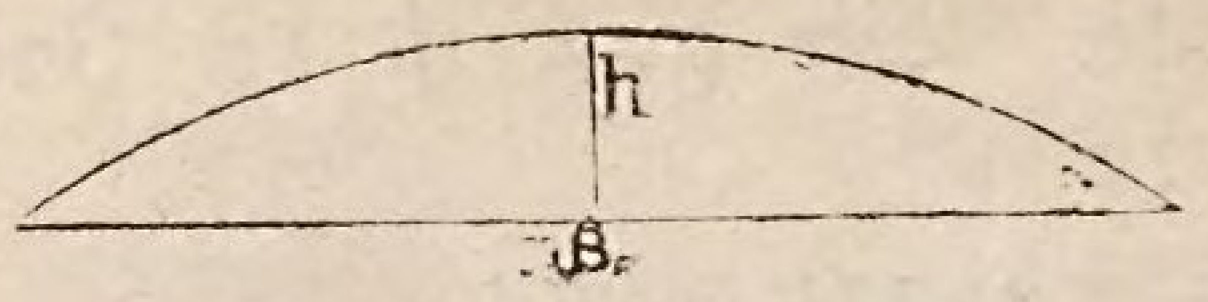
$F = {}^{22}/_{7}\ (1^{11}/_{12} \cdot 1^{3}/_{8} - 1^{13}/_{24} \cdot 1) = 3^{7}/_{16}\square' = 3\square'$ $63\square''$.

41. Man findet die Brennpunkte einer Ellipse, wenn man aus dem Endpunkte der kleinen Achse mit einem Halbmesser gleich der halben großen Achse diese schneidet; die Durchschnittspunkte sind die Brennpunkte.



Die große Achse sei 2′ 10″, die kleine Achse 2′ 6″, so ist die halbe Entfernung der Brennpunkte:

$x^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$; $x = \sqrt{64} = 8''$, daher die ganze Entfernung der Brennpunkte = 16″ = 1′ 4″.

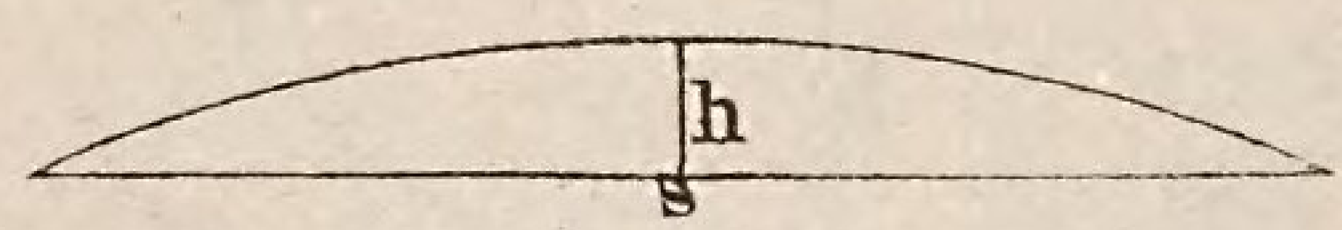


42. Die Länge eines gedrückten Parabelbogens, wenn s die Sehne und h die Bogenhöhe bezeichnet, ist annähernd =

$$s\left[1 + {}^{8}/_{3}\left(\frac{h}{s}\right)^2\right].$$

Für $s = 12^2/_3{}'$, $h = 1^1/_2{}'$, ist der Bogen =

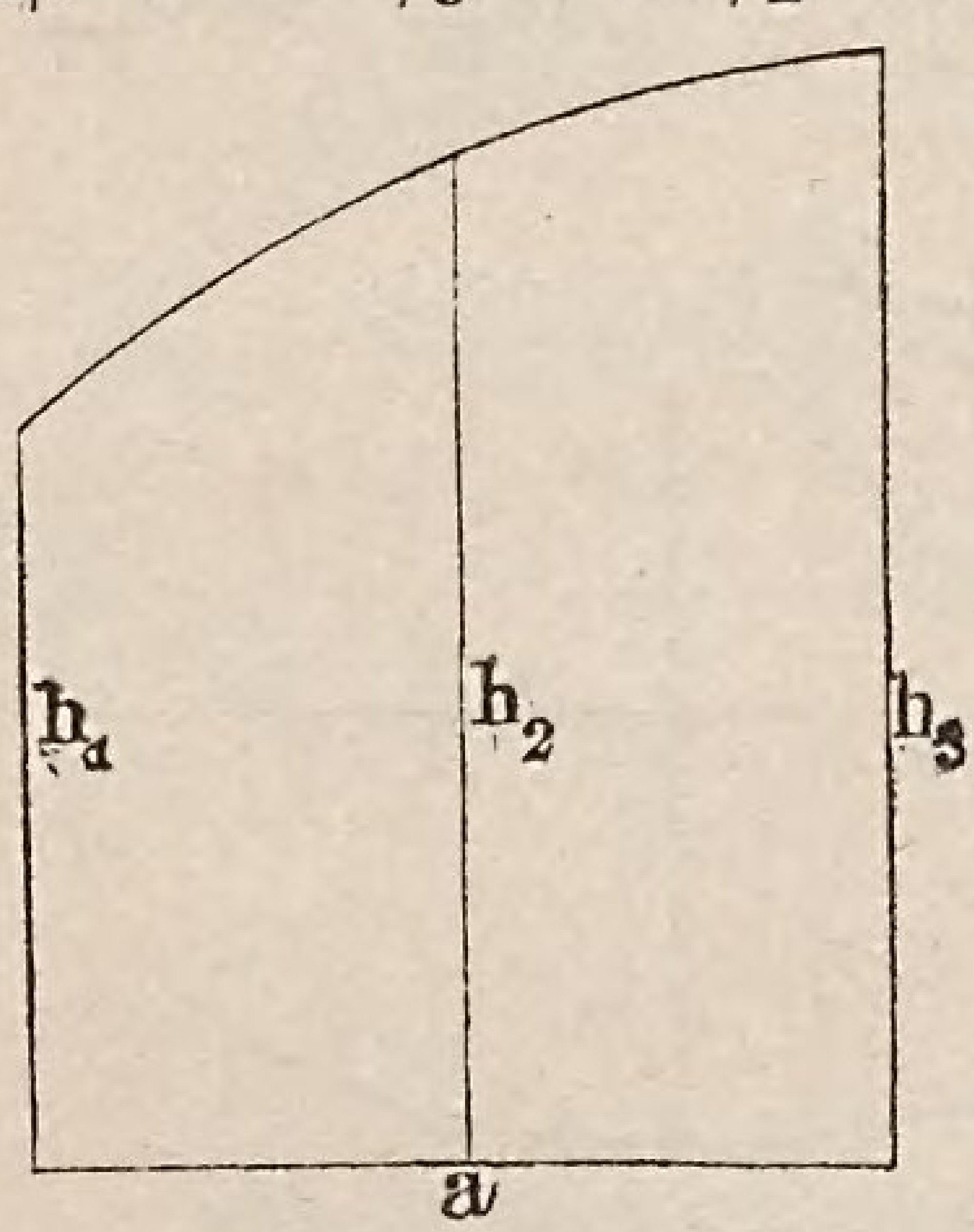
$$12^2/_3\left[1 + {}^{8}/_{3}\left(\frac{1^1/_2}{12^2/_3}\right)^2\right] = 13'\ 2''\ \text{beinahe.}$$



43. Der Flächeninhalt eines parabolischen Abschnitts, dessen Seite = s und dessen Höhe = h gegeben, ist

$$F = {}^2/_3\ sh.$$

Ist die Sehne $s = 10'\ 6''$, die Höhe $h = 3'\ 4''$, so ist $F = {}^2/_3 \cdot 10^1/_2 \cdot 3^1/_3 = 23^1/_3\square'$.



44. Aus der Grundlinie a und den 3 in gleichen Abständen gemessenen Höhen h_1, h_2 und h_3 ergibt sich die mittlere Höhe durch die Formel:

$$h = \frac{h_1 + 4h_2 + h_3}{6}.$$

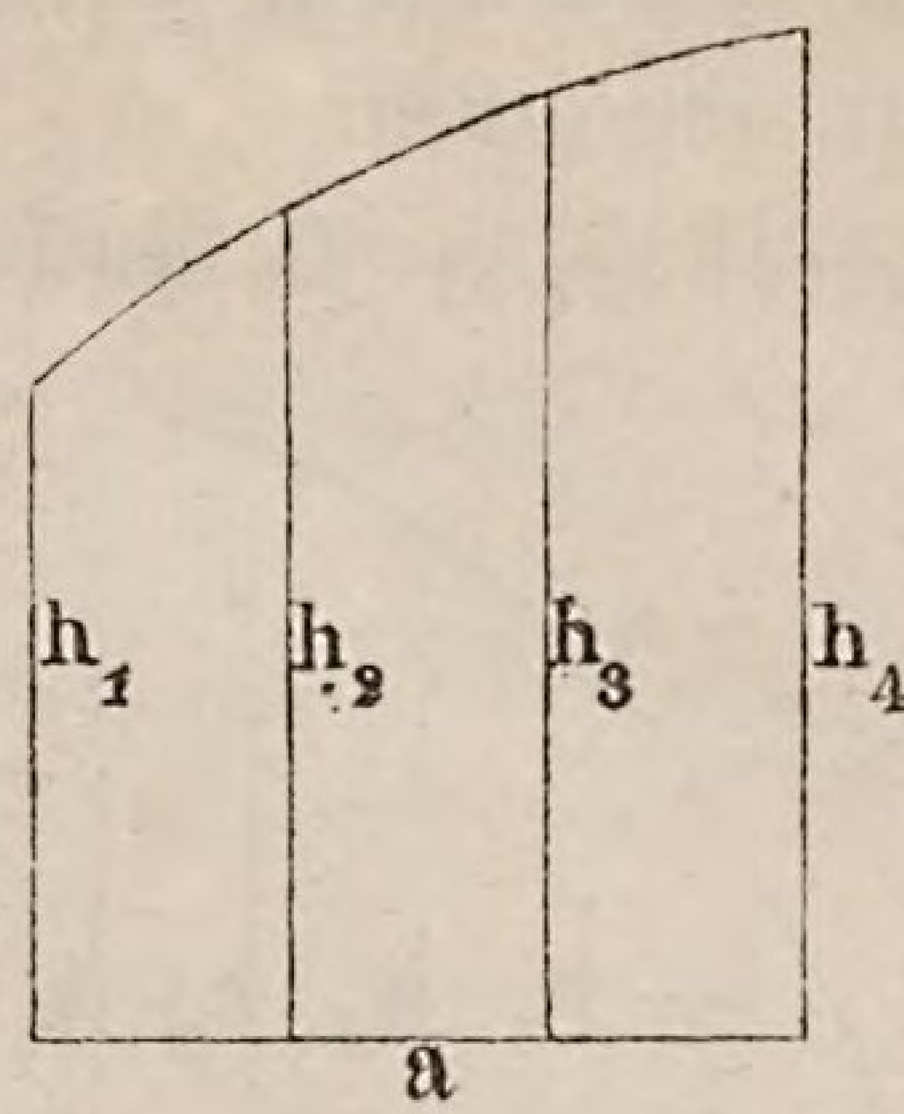
Ist $h_1 = 6'\ 8''$, $h_2 = 9'\ 6''$, $h_3 = 10'\ 4''$, so ist

$$h = \frac{6^2/_3 + 4 \cdot 9^1/_2 + 10^1/_3}{6} = {}^{55}/_6 = 9^1/_6{}' = 9'\ 2''.$$

Der Inhalt $F = ah = a \cdot \frac{h_1 + 4h_2 + h_3}{6}$. Im vorliegenden Falle also, wenn $a = 9^3/_4{}'$, ist

$$F = 9^3/_4 \cdot 9^1/_6 = 89^3/_8 \square' = 89 \square' \; 54 \square''.$$

45. Aus der Grundlinie a und den 4 in gleichen Abständen gemessenen Höhen ergibt sich die mittlere Höhe



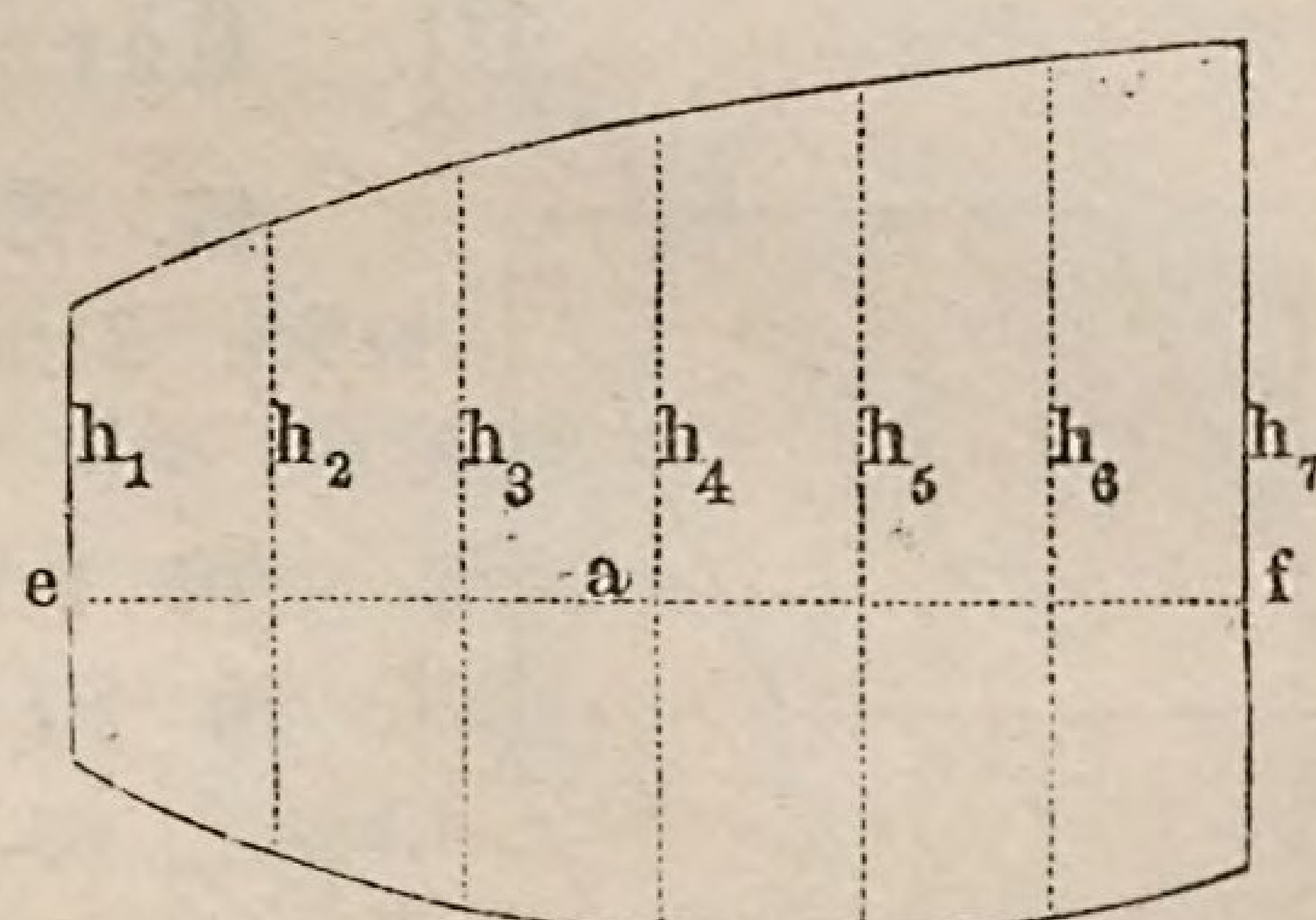
$$h = \frac{h_1 + 3\,(h_2 + h_3) + h_4}{8},$$

und der Inhalt $F = a h = a \frac{h_1 + 3\,(h_2 + h_3) + h_4}{8}$.

Ist $a = 12'\,6''$, $h_1 = 6'\,9''$, $h_2 = 8'\,6''$, $h_3 = 9'\,8''$, $h_4 = 10'\,4''$, so ist

$$h = \frac{6^3/_4 + 3\,(8^1/_2 + 9^2/_3) + 10^1/_3}{8} = \frac{71^7/_{12}}{8} = \frac{859}{12 \cdot 8} = 8^{91}/_{96}{}'$$ und der Inhalt $= 12^1/_2 \cdot 8^{91}/_{86} = 111 \square' \; 122^1/_4 \square''$.

46. Für den Inhalt einer durch die Länge $ef = a$ und durch die gleichen Abstände (in gerader Anzahl 2n) gegebenen Figur hat man



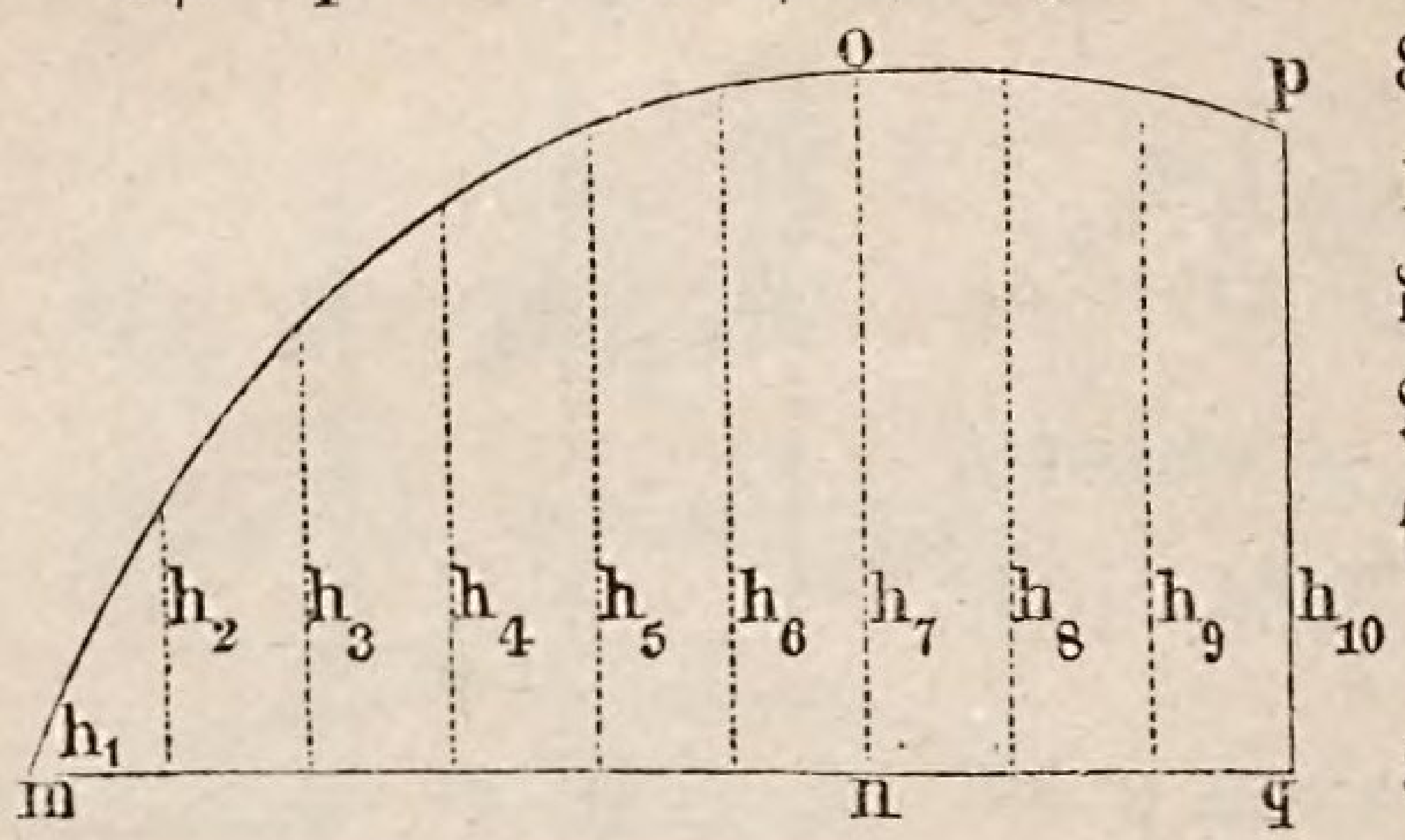
$$F = \frac{a}{3 \cdot 2n}\,[h_1 + 4\,(h_2 + h_4 + \ldots + h_{2n}) + 2\,(h_3 + h_5 + \ldots + h_{2n-1}) + h_{2n+1}].$$

Für beistehende Figur mit 6 gleichen Abständen ist also

$$F = \frac{a}{3 \cdot 6}\,[h_1 + 4\,(h_2 + h_4 + h_6) + 2\,(h_3 + h_5) + h_7].$$

Ist die Anzahl der Streifen ungerade, so berechnet man ein Stück mit 3 Streifen nach §. 45 und das Uebrige wie vor angegeben.

Ist $h_1 = 0$ Ruthen, $h_2 = 4,8°$, $h_3 = 6,8°$ u. s. f. 8,7; 10,0; 12,1; 12,3; 13,0; 12,0; 11,2°; die Länge $mq = 45$ Ruthen, so hat man für die Fläche mno



$$F = [0 + 4\,(4,8 + 8,7 + 12,1) + 2\,(6,8 + 10,0) + 12,3]\,\frac{30}{3 \cdot 6} = \cdots \quad 247,17\square°$$

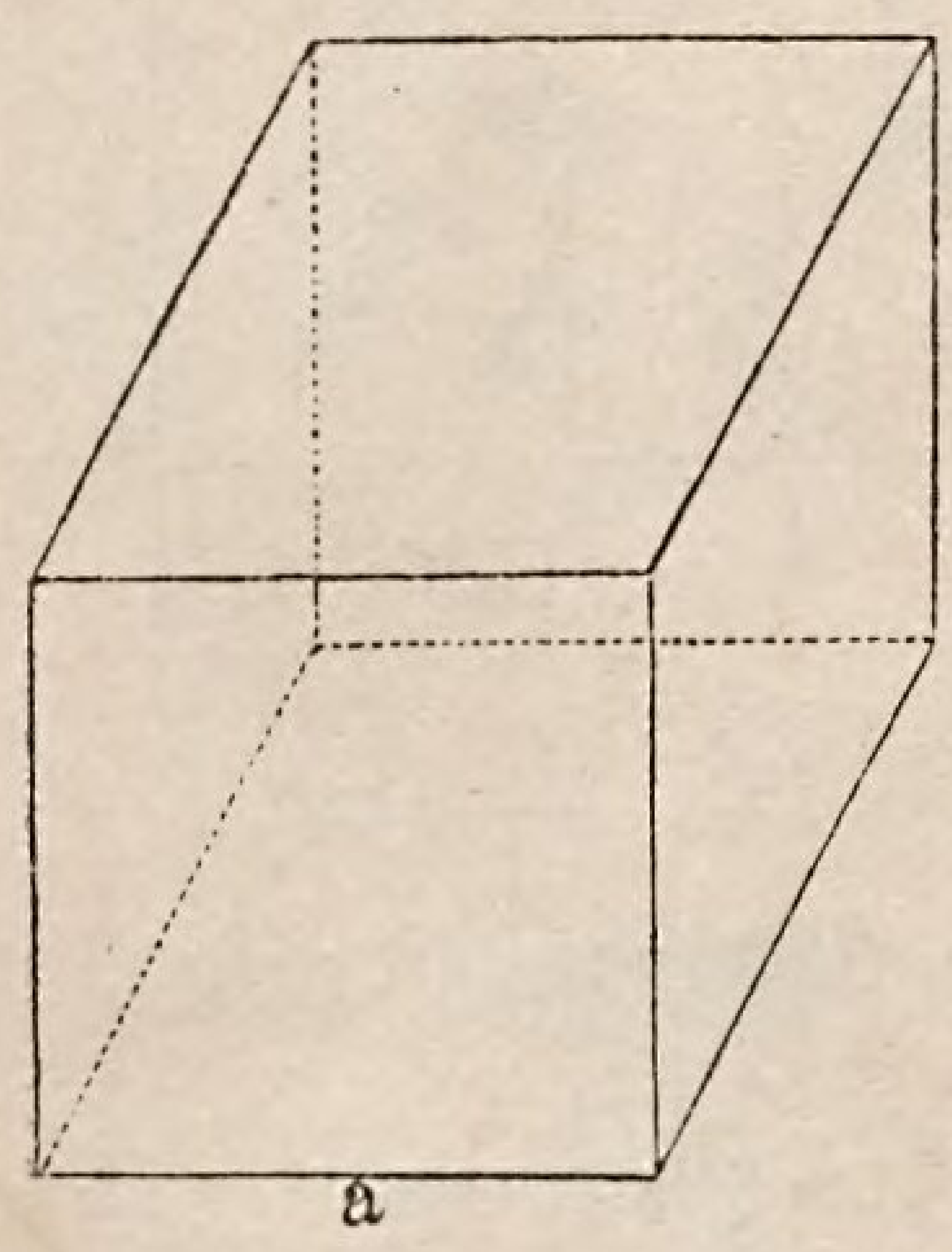
und für die Fläche $nopq$

$$F = [12,3 + 3\,(13 + 12 + 11,2]\ ^{15}/_{8} = 184,69\square°$$

zusammen $431,86\square°$

oder $431\square°$ $123,84\square'$.

III. Körper.



47. Der Inhalt eines Würfels, dessen Seite = a, ist =

$$K = a^3.$$

Ist der Inhalt = K gegeben, so ist die Seite des Würfels = $\sqrt[3]{K}$.

Ist $a = 1' = 12''$, so ist $K = 12^3 = 1728$ c'' (Kubikzoll) = 1 c' (Kubikfuß).

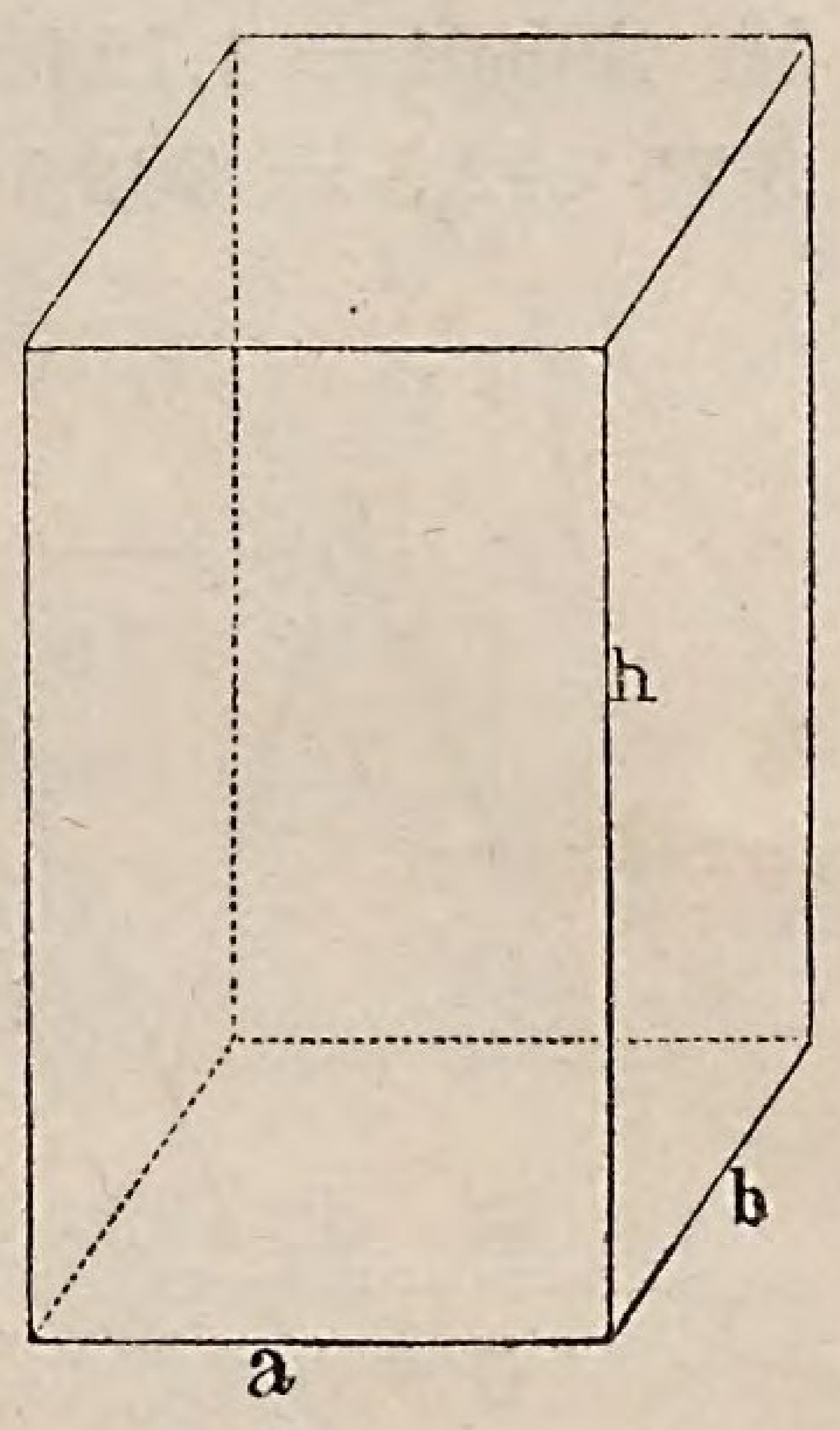
Ist $a = 4''$, so ist $K = 4^3 = 64\ c'' = 1$ Quart.

Hat ein Steinwürfel zur Seite $3'\ 7''$, so ist dessen Inhalt $K = (3^7/_{12})^3 = 46\ c'\ 19\ c''$.

Ist der Inhalt eines Würfels $= 512\ c''$, so ist dessen Seite $= \sqrt[3]{512} = 8''$.

48. Der Inhalt eines Parallelepipedums (Balken) ergibt sich aus den 3 rechtwinkelig aneinander stoßenden Seiten a, b und h.

$$K = a \cdot b \cdot h.$$

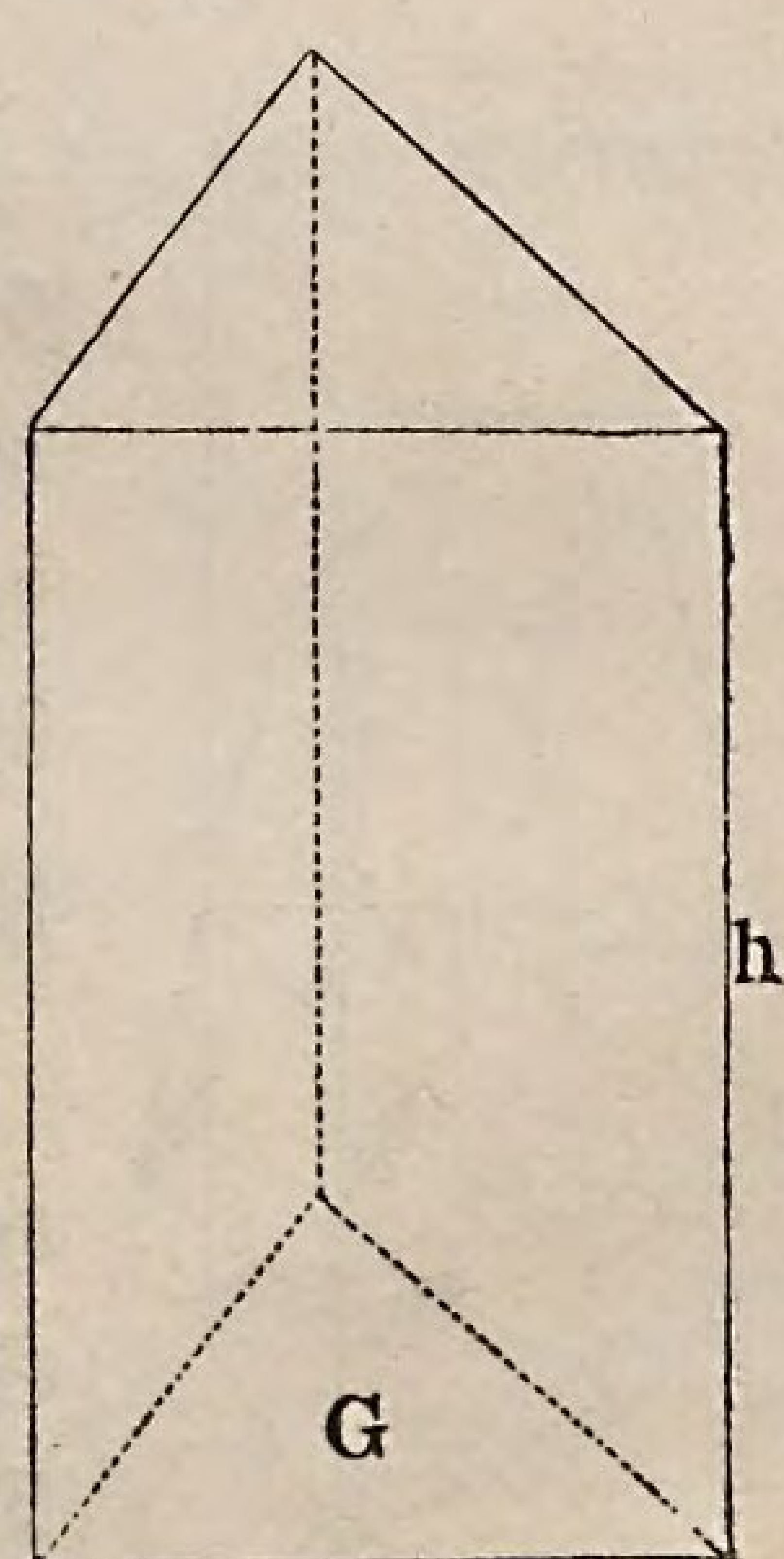


Ein Ziegelstein von $10''$ Länge, $4^5/_6''$ Breite, $2^1/_2''$ Dicke hat demnach einen Inhalt von $10 \cdot 4^5/_6 \cdot 2^1/_2 = 120^5/_6\ c''$.

Ist $a = 12'$, $b = 12'$, $h = 1'$, so ist $K = 12 \cdot 12 \cdot 1 = 144\ c' = 1$ Schachtruthe.

49. Der Inhalt eines jeden Prismas ist, wenn G die Grundfläche und h die Höhe bezeichnet,

$$K = G \cdot h.$$



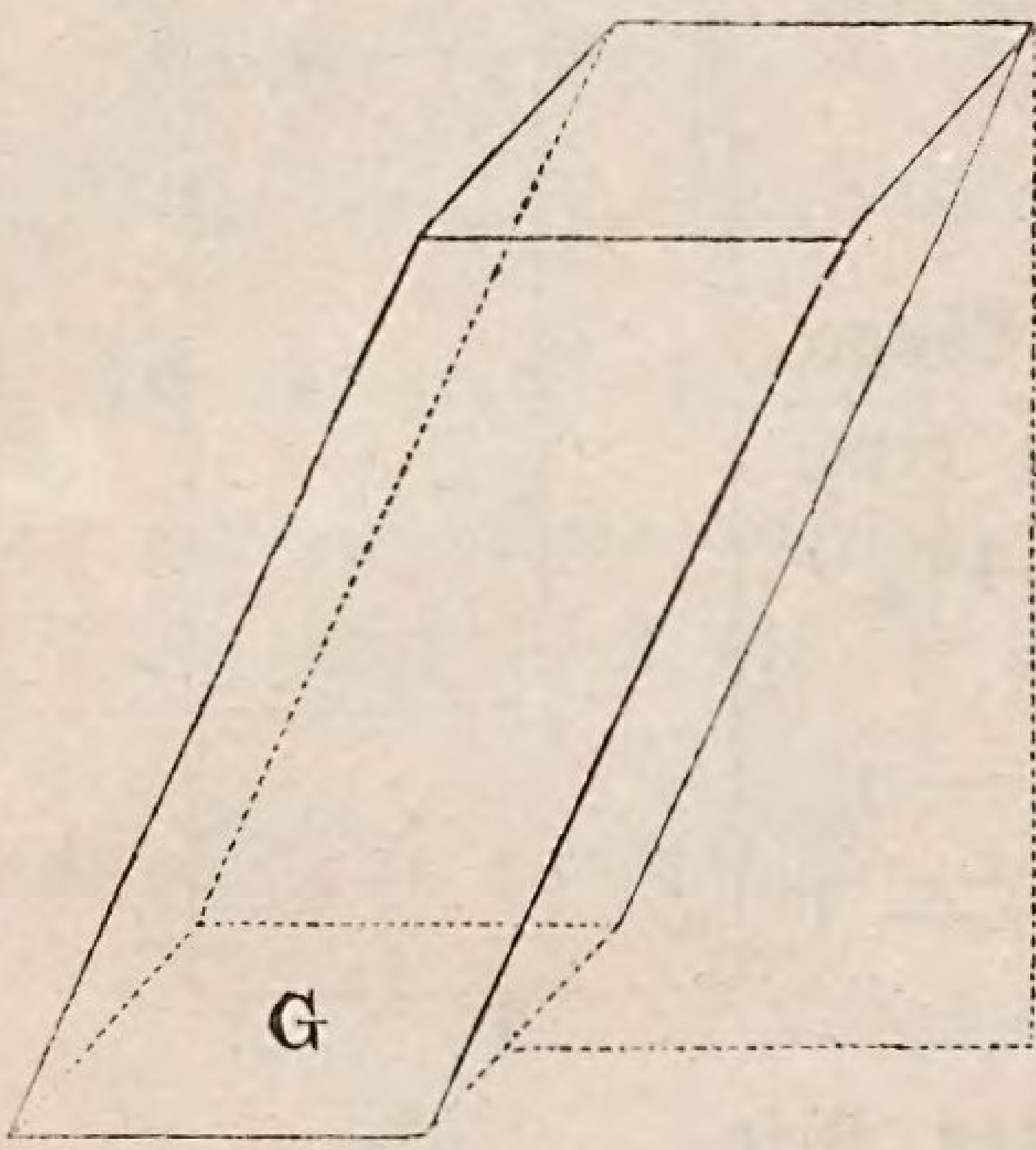
Ist die Grundfläche ein Dreieck, dessen Grundlinie $= 9'\ 6''$, dessen Höhe $= 6'\ 4''$, und ist die Höhe des Prismas $= 10'\ 8''$, so ist der Inhalt $=$

$$\frac{9^1/_2 \cdot 6^1/_3}{2} \cdot 10^2/_3 = 320^8/_9\ c'.$$

Ist die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $= 1'\ 7''$, und

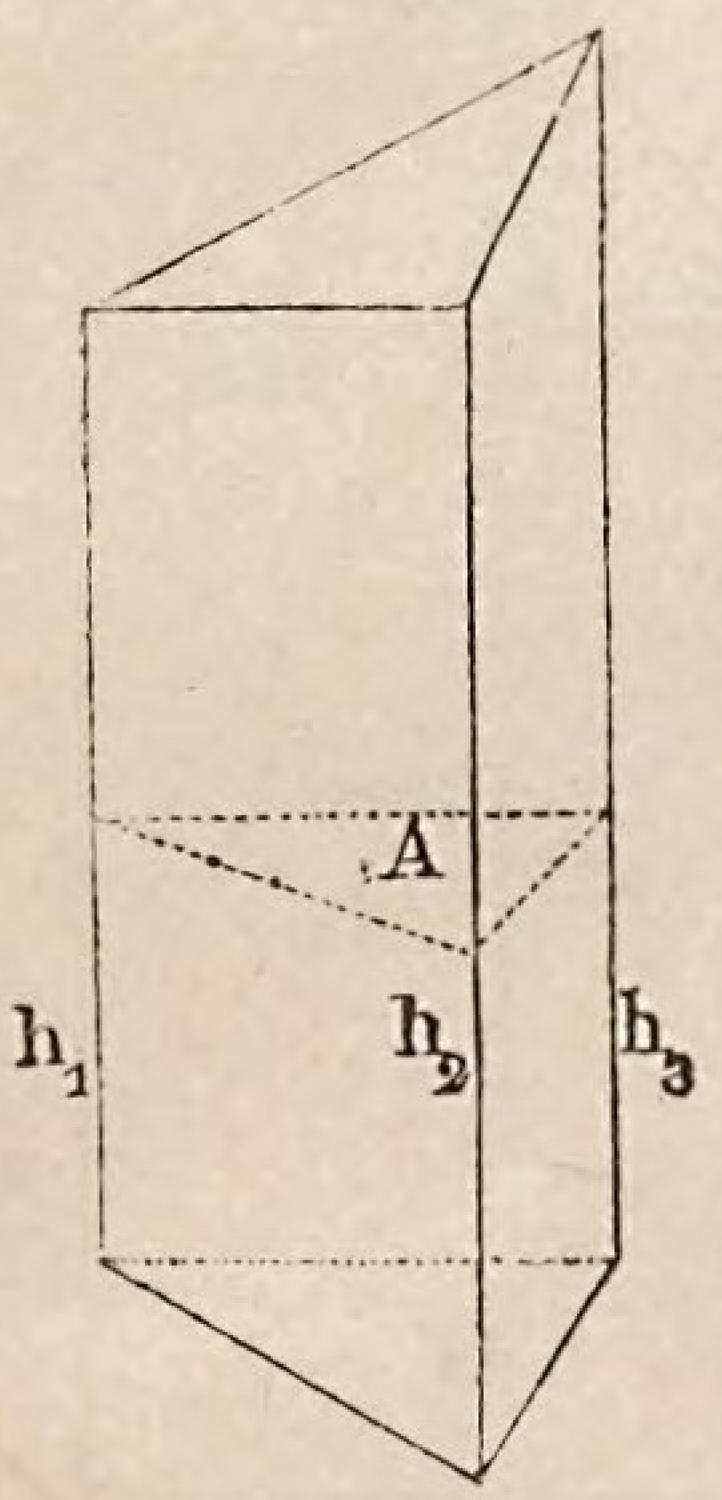
ist die Höhe des Prismas = 5′ 9″, so ist der Inhalt = $\frac{19^2}{4}\sqrt{3}\cdot 69$ (§. 3) = $\frac{19\cdot 19\cdot 1{,}7321\cdot 69}{4}$ = 10786,2 c″ = 6 c′ 418,2″ c.

Ist die Grundfläche ein reguläres Fünfeck, dessen Seite = 3′ 9″, und ist die Höhe des Prismas = 12′ 6″, so ist der Inhalt = $1{,}721\ (3^3/_4)^2 \cdot 12^1/_2$ (§. 15) = 1,721 · 3,75 · 3,75 · 12,5 = 302,53 c′ = 302 c′ 916 c″.



50. Der Inhalt eines schiefen Prismas ist = G · h, unter G die Grundfläche und unter h der normale Abstand der beiden Grundflächen verstanden.

Ist G = 104□′ 36□″, h = 9′ 6″, so ist K = $104^1/_4 \cdot 9^1/_2 = 990^3/_4$ c′ = 990 c′ 648 c″.



51. Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prismas ist, wenn A den Inhalt des normalen Querschnitts bedeutet und die Kanten = h_1, h_2, h_3 .... h_n gegeben sind,

$$K = A \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots h_n}{n}.$$

Ein prismatischer Erdabtrag habe zur Grundebene (normaler Querschnitt) ein Sechseck von 7□° 113□′ Flächeninhalt. Die 6 ungleichen Höhen seien:

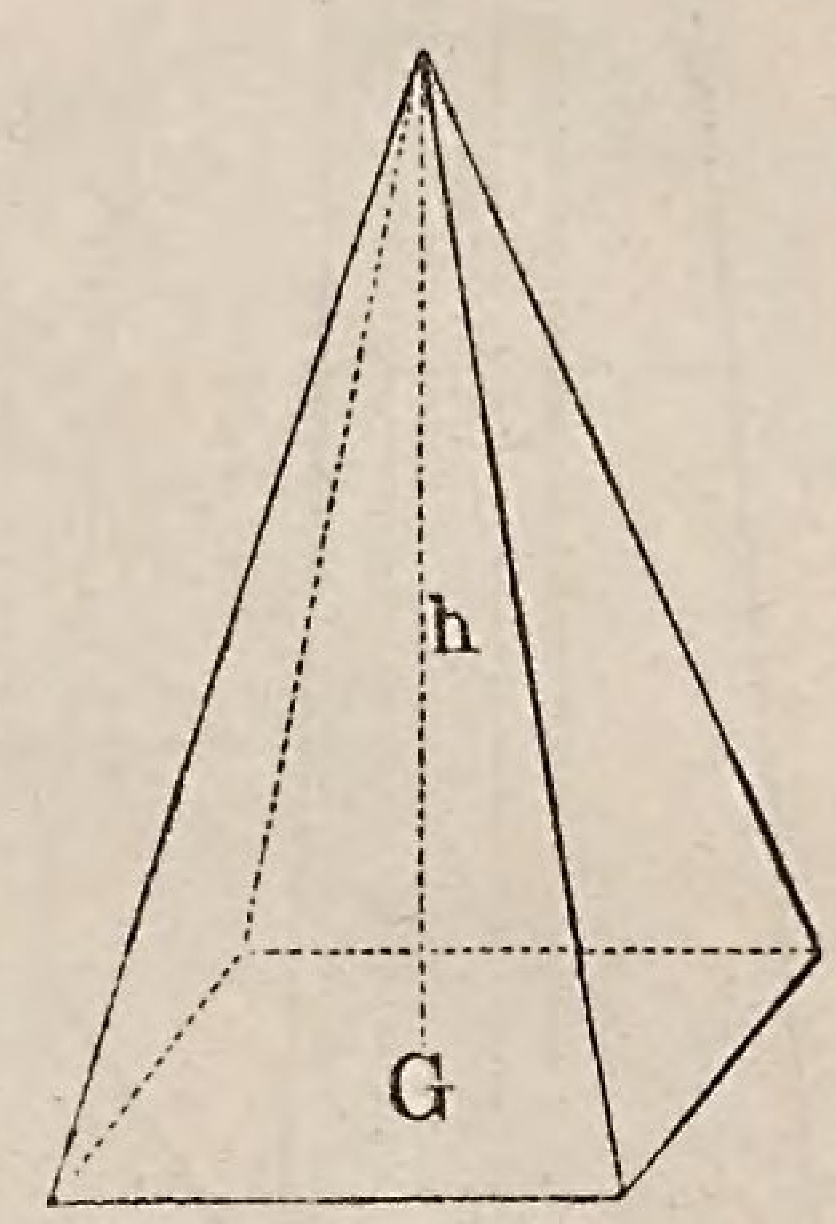
a) $2'\ 3^1/_2''$, b) $2'\ 1^1/_4''$, c) $1'\ 9^1/_4''$, d) $1'\ 8^3/_4''$, e) $2'\ ^1/_2''$, f) $2'\ 2^3/_4''$; es ist der Inhalt des Abtrags =

$$1121 \cdot \frac{2^7/_{24} + 2^5/_{48} + 1^{37}/_{48} + 1^{35}/_{48} + 2^1/_{24} + 2^{11}/_{48}}{6} =$$

$$\frac{1121 \cdot 12^1/_6}{6} = 2273^5/_{36}\ c' = 15 \text{ Schachtr. } 113^5/_{36}\ c'.$$

52. Der Inhalt einer Pyramide, unter G die Grundfläche und unter h die Höhe der Pyramide verstanden, ist

$$K = \frac{G \cdot h}{3}.$$



Ist die Grundfläche ein reguläres Achteck, der Radius des Kreises, in welchem das Achteck liegt, = 6′ 8″, und ist die Höhe der Pyramide = 12′ 9″, so ist der Inhalt =

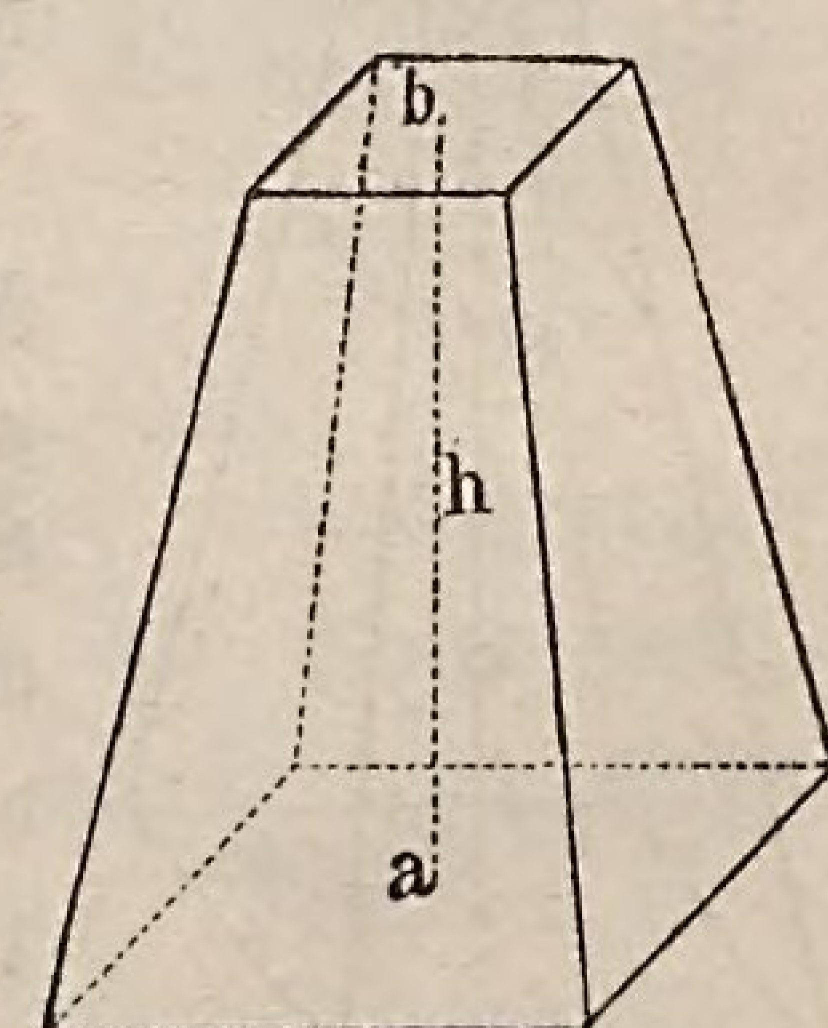
$$2{,}828 \cdot (6^2/_3)^2 \cdot 12^3/_4 \ (\S.\ 37) = \frac{2{,}828 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 51}{3 \cdot 3 \cdot 4} =$$

1602,5 c′ = 11 Schachtr. 18,5 c′.

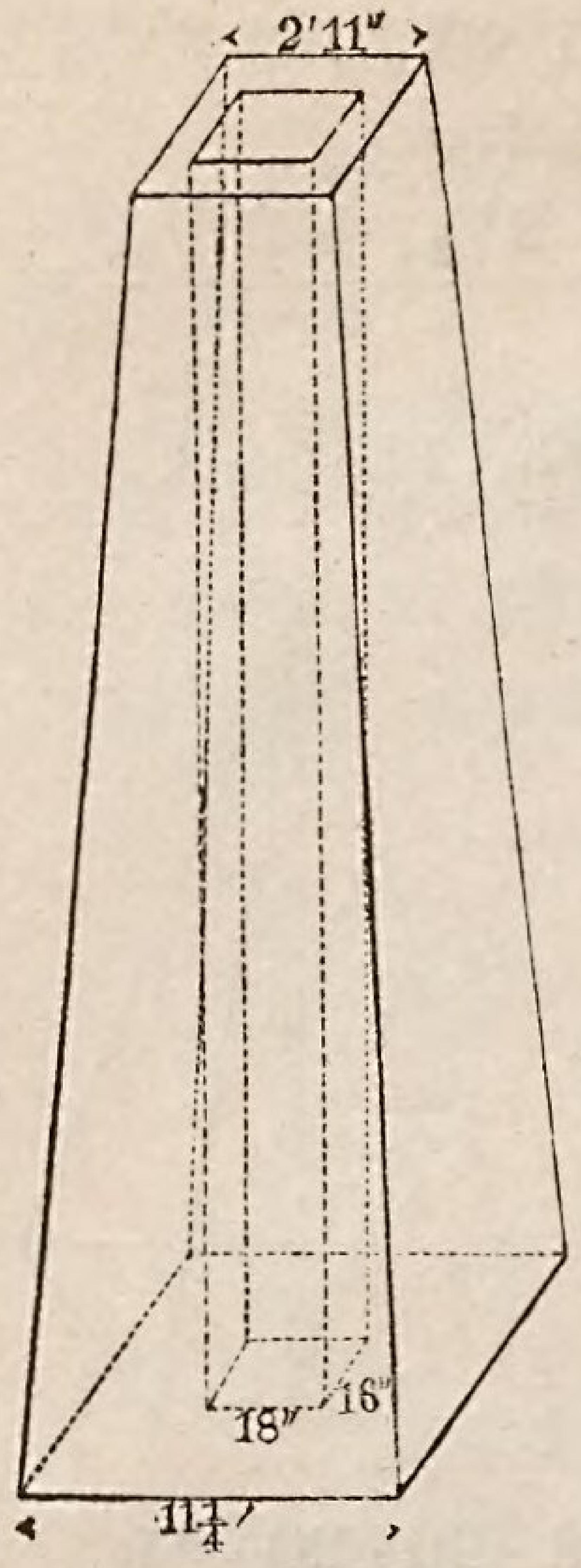
Bei einer schiefen Pyramide ist h = dem senkrechten Abstande der Grundfläche von der Spitze.

53. Der Inhalt einer abgekürzten Pyramide, wenn a und b den Inhalt der beiden Grundebenen und h die Höhe des Körpers bezeichnet,

$$K = \frac{h}{3}(a + b + \sqrt{ab}).$$



Sind die beiden Grundflächen Quadrate, hat das eine zur Seite 12′, das andere 8′, und ist h = 6′,

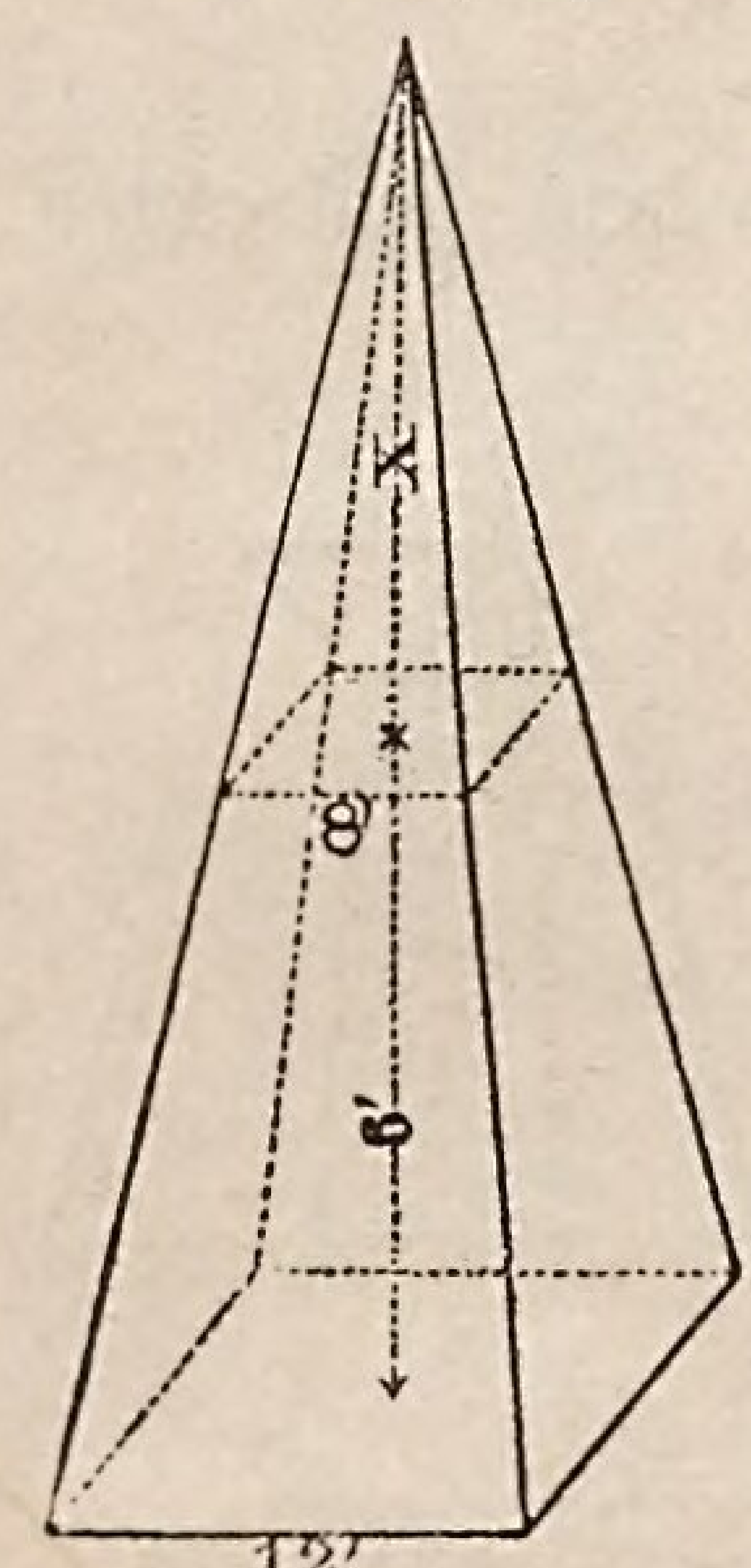


$$K = \frac{6}{3}(12^2 + 8^2 + \sqrt{12^2 \cdot 8^2} = \frac{6}{3}(12^2 + 8^2 + 12 \cdot 8) = 2\,(144 + 64 + 96) = 608 \text{ c}'.$$

Es soll der kubische Inhalt eines Schornsteins berechnet werden, dessen untere Grundfläche ein Quadrat von $11\frac{1}{4}'$ Seitenlänge, und dessen obere Grundfläche ein Quadrat von 2′ 11″ Seitenlänge bildet, und wenn die Höhe = 48′ ist und das innere Rohr einen Querschnitt von 16 à 18″ hat.

$$K = \frac{48}{3}\left[(11\tfrac{1}{4})^2 + (2\tfrac{11}{12})^2 + \sqrt{(11\tfrac{1}{4})^2 \cdot (2\tfrac{11}{12})^2}\right] - 1\tfrac{1}{3} \cdot 1\tfrac{1}{2} \cdot 48 = 2686\tfrac{1}{9} - 96 = 2590\tfrac{1}{9} \text{ c}'$$

= 17 Schachtr. $142\frac{1}{9}$ c′.

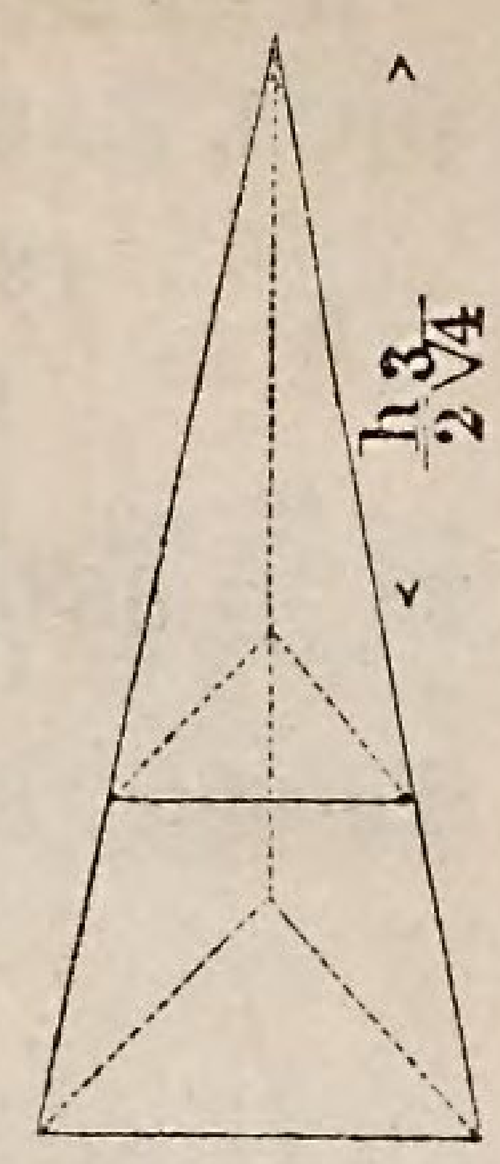


54. Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so verhalten sich die beiden Flächen wie die Quadrate ihrer normalen Abstände vom Eckpunkte.

Sind z. B. die Grundebenen einer abgekürzten Pyramide Quadrate von 12′ und 8′ Seitenlänge, und ist die Höhe der abgekürzten Pyramide = 6′, so findet man die Höhe der Ergänzungs-Pyramide durch die Proportion:

$12^2 : 8^2 = (6 + x)^2 : x^2$ oder $12 : 8 = 6 + x : x$; $x = 12'$.

55. Soll eine Pyramide, deren Höhe $= h$ ist, durch eine Ebene in zwei gleiche Theile getheilt werden, so ist die Entfernung der Theilungsebene von der Spitze =

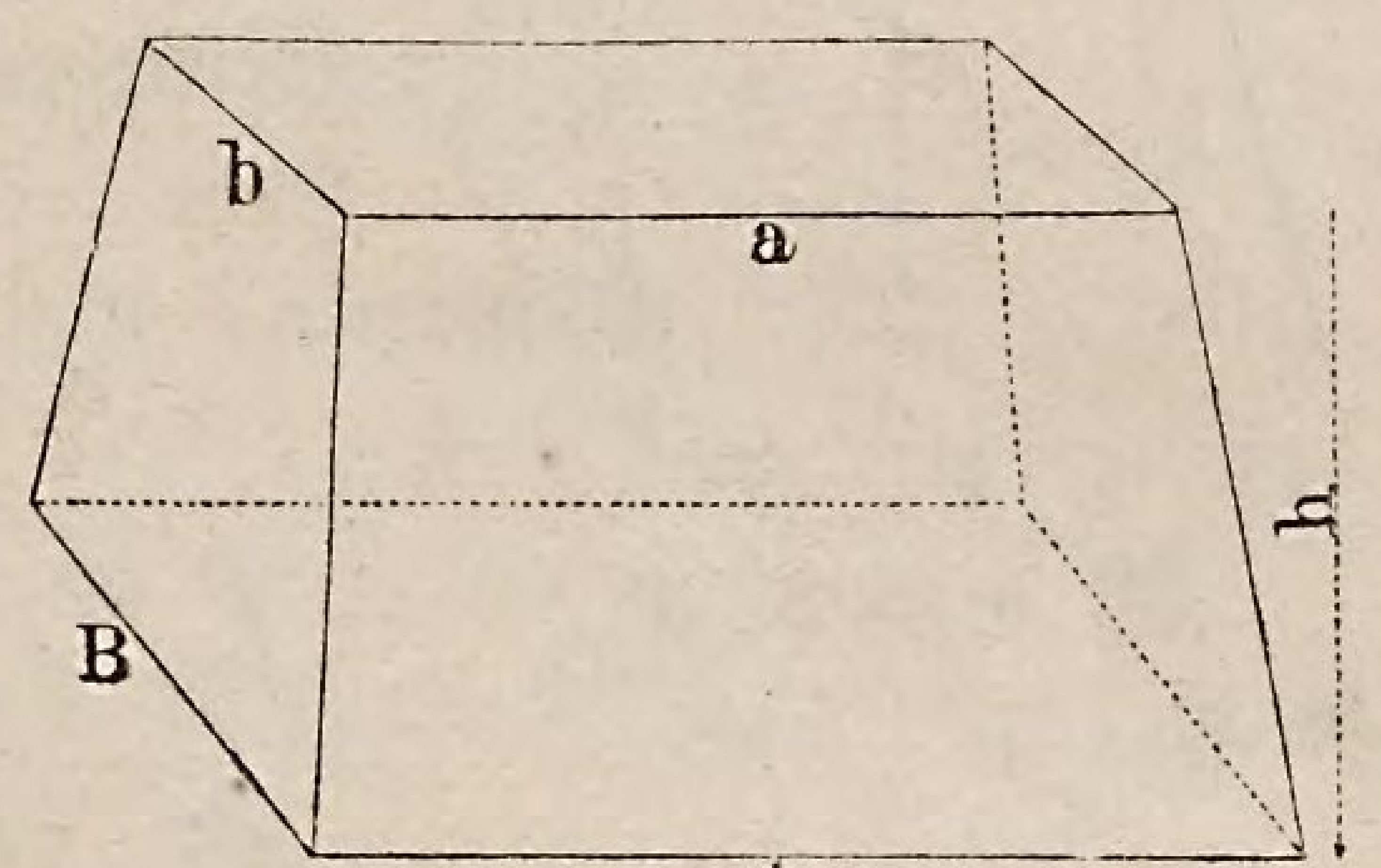


$$\frac{h}{2}\sqrt[3]{4}.$$

Ist $h = 10'$, so ist diese Entfernung =

$$\frac{10}{2}\sqrt[3]{4} = 7{,}937' = 7'\ 11''.$$

56. Der Inhalt eines Obelisken, wenn A und B die Seiten der einen, und a und b die Seiten der andern Grundfläche sind, und h die Höhe des Körpers bezeichnet, ist



$$K = \frac{h}{6}(2AB + 2ab + Ab + Ba).$$

Ist $A = 10'$, $B = 8'$, $a = 5'$, $b = 4'$, und $h = 40'$, so ist

$$K = \frac{40}{6}(2 \cdot 10 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 5) =$$

$$\frac{40}{6} \cdot 280 = 1866^2/_3\ c'.$$

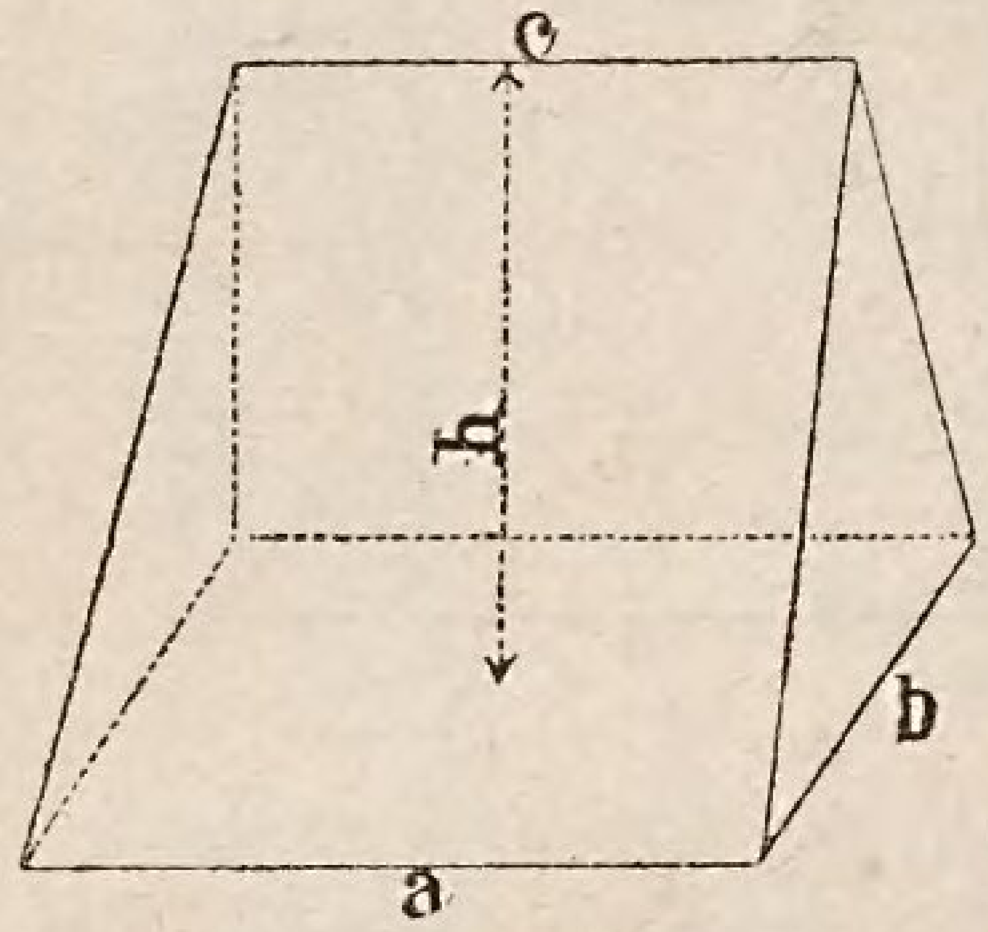
Wie groß ist der Erdkörper bei einer anzulegenden Baugrube, deren Sohle ein Rechteck von 40′ Länge und 28′ Breite bildet, wenn die Tiefe 12′ 6″ beträgt und eine $1^1/_2$füßige Dossirung angebracht werden soll?

Es ist $A = 40 + 1^1/_2 \cdot 12^1/_2 + 1^1/_2 \cdot 12^1/_2 = 77^1/_2{}'$,

$B = 28 + 1^1/_2 \cdot 12^1/_2 + 1^1/_2 \cdot 12^1/_2 = 65^1/_2{}'$; $a = 40'$, $b = 28'$, daher

$$K = \frac{12^1/_2}{6} (2 \cdot 77^1/_2 \cdot 65^1/_2 + 2 \cdot 40 \cdot 28 + 77^1/_2 \cdot 28 + 65^1/_2 \cdot 40) = \frac{25}{12} \cdot 17182^1/_2 = 35796^7/_8 \ c' = 248$$

Schachtr. $84^7/_8$ c'.



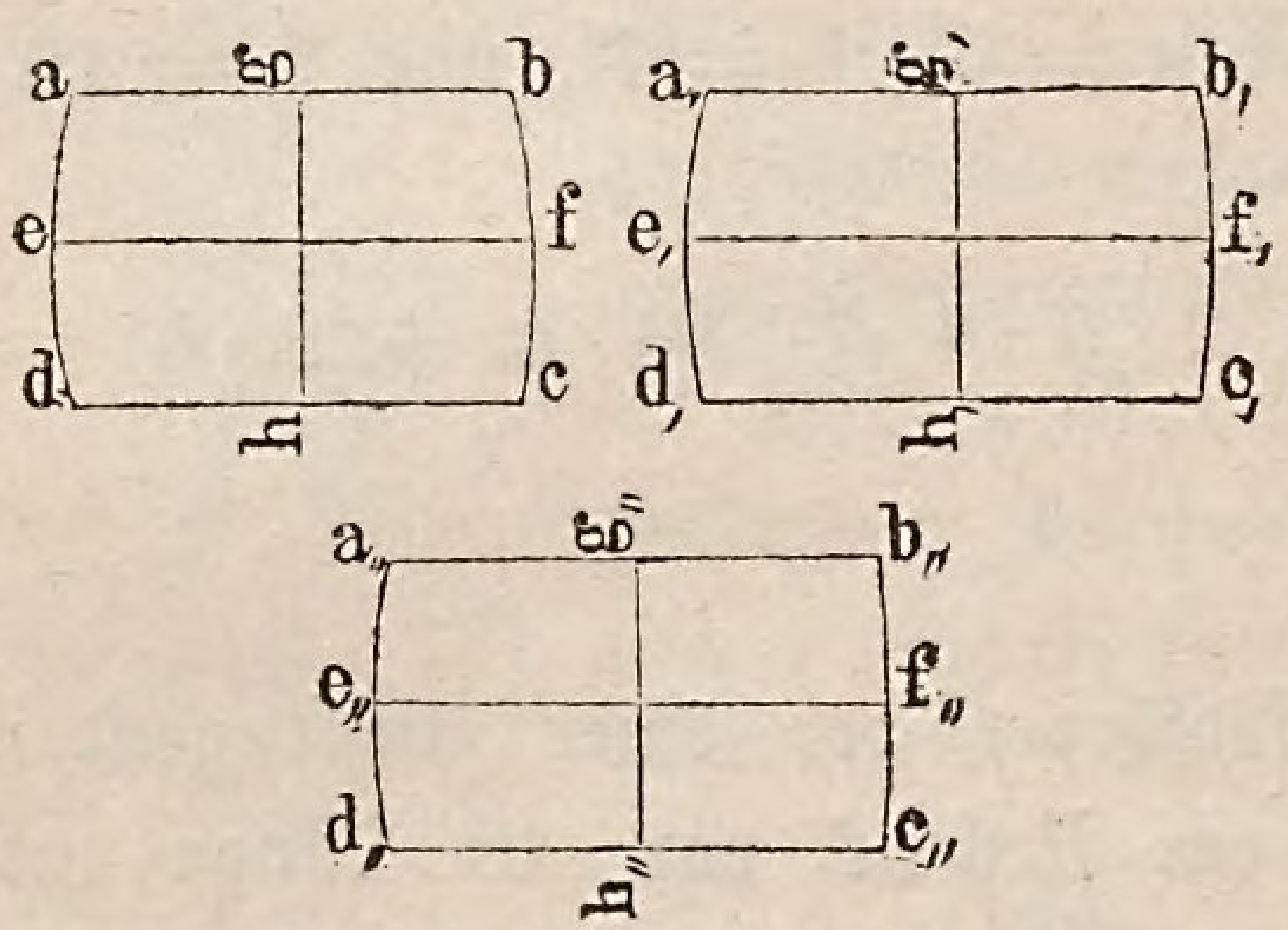
57. Der Inhalt eines Keiles, wenn die Seiten der rechtwinkeligen Grundfläche = a und b, die gegenüberstehende Kante = c und die Höhe = h gegeben sind, ist =

$$K = (2a + c) \frac{bh}{6}.$$

Ist $a = 8'\ 4''$, $b = 4'\ 9''$, $c' = 3'\ 6''$, $h = 7'\ 6''$, so ist

$$K = (2 \cdot 8^1/_3 + 3^1/_2) \frac{4^3/_4 \cdot 7^1/_2}{6} = {}^1/_6 \cdot 20^1/_6 \cdot 4^3/_4 \cdot 7^1/_2$$

$= 119\ c'\ 1278\ c''$.



58. Ein nicht genau gearbeiteter, parallelepipedischer Kasten habe bei 5' Höhe folgende Längen- und Breiten-Dimensionen:

im untern Querschnitt:

$ab = 3'\ 8''$, $ef = 3'\ 8^1/_2{}''$, $cd = 3'\ 8^1/_4{}''$,

$ad = 2'\ 5^3/_4{}''$, $gh = 2'\ 6^1/_4{}''$, $bc — 2'\ 6''$;

im obern Querschnitt:

$a_, b_, = 3'\ 10''$, $e_, f_, = 3'\ 10^1/_2''$, $c_, d_, = 3'\ 10^1/_4''$,
$a_, d_, = 2'\ 7''$, $g_, h_, = 2'\ 7^1/_4''$, $b_, c_, = 2'\ 7^1/_8''$;

im mittlern Querschnitt:

$a_{,,} b_{,,} = 3'\ 9^1/_2''$, $e_{,,} f_{,,} = 3'\ 10^3/_4''$, $c_{,,} d_{,,} = 3'\ 10''$,
$a_{,,} d_{,,} = 2'\ 6''$, $g_{,,} h_{,,} = 2'\ 6^3/_4''$, $b_{,,} c_{,,} = 2'\ 6^1/_2''$.

Hieraus erhält man nach §. 44

die mittlere Länge des untern Querschnitts

$$\frac{3^2/_3 + 4 \cdot 3^{17}/_{24} + 3^{11}/_{16}}{6} = {}^1/_6 \cdot 22^3/_{16}$$

die mittlere Breite $\dfrac{2^{23}/_{48} + 4 \cdot 2^5/_{48} + 2^1/_2}{6} = {}^1/_6 \cdot 15^1/_{16}$

die mittlere Länge des obern Querschnitts

$$\frac{3^5/_6 + 4 \cdot 3^7/_{16} + 3^{41}/_{48}}{6} = {}^1/_6 \cdot 21^7/_{16}$$

die mittlere Breite $\dfrac{2^7/_{12} + 4 \cdot 2^{29}/_{48} + 2^{19}/_{32}}{6} = {}^1/_6 \cdot 15^{19}/_{32}$

die mittlere Länge des mittlern Querschnitts

$$\frac{3^{19}/_{24} + 4 \cdot 3^{43}/_{48} + 3^5/_6}{6} = {}^1/_6 \cdot 23^5/_{24}$$

die mittlere Breite $\dfrac{2^1/_2 + 4 \cdot 2^9/_{16} + 2^{13}/_{24}}{6} = {}^1/_6 \cdot 15^7/_{24}$

der Inhalt des untern Querschnitts ist daher

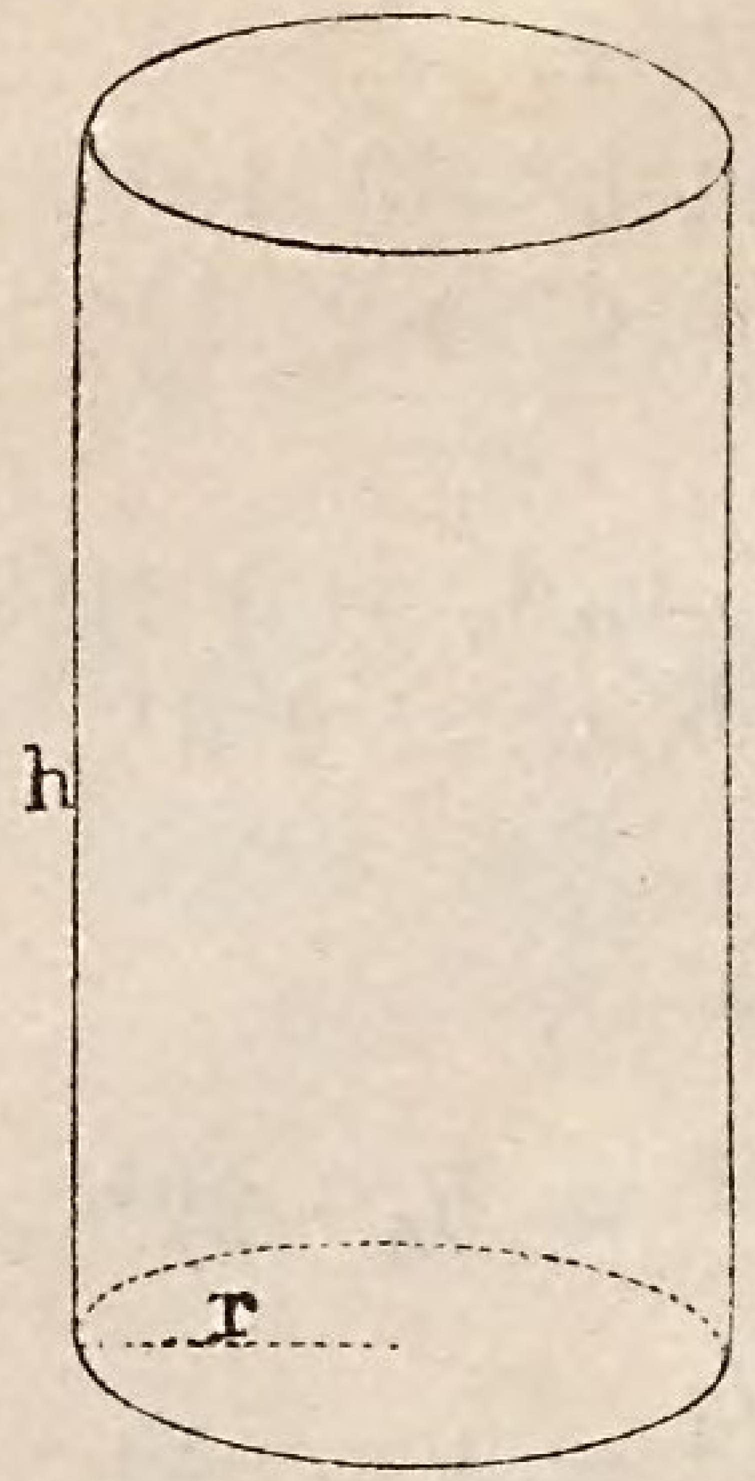
$= {}^1/_6 \cdot 22^3/_{16} \cdot {}^1/_6 \cdot 15^1/_{16} = 9{,}28$

= = = obern $= = {}^1/_6 \cdot 21^7/_{16} \cdot {}^1/_6 \cdot 15^9/_{32} = 9{,}09$

= = = mittlern $= = {}^1/_6 \cdot 23^5/_{24} \cdot {}^1/_6 \cdot 15^7/_{24} = 9{,}86$

Der mittlere Inhalt des mittlern Querschnitts des Körpers ist daher $= \dfrac{9{,}28 + 4 \cdot 9{,}86 + 9{,}09}{6} = 9{,}44$ und

der Inhalt des Körpers $= 5 \cdot 9{,}44 = 47{,}2\ c' = 47\ c'\ 346\ c''$.



59. Der Mantel F eines Cylinders, wenn der Halbmesser des Grundkreises $= r$ und die Höhe $= h$ gegeben,

$$F = 2\pi r h,$$

und die Gesammt-Oberfläche

$$V = 2\pi r\,(r + h)$$

und der Mantel und eine Grundfläche

$$\pi r\,(r + 2h).$$

Ein cylindrischer Raum von 13′ Durchmesser und $19\frac{1}{4}$′ Höhe soll im Boden und in den Seitenwänden mit Bretern verschalt werden, wie viele 16schüh. Breter à 14′ lang 10″ breit sind dazu erforderlich?

Der Inhalt des zu verschalenden Raumes beträgt

$$\frac{22}{7} \cdot 6^1/_2\,(6^1/_2 + 2 \cdot 19^1/_4) = \frac{21 \cdot 13 \cdot 45}{7 \cdot 2};$$ daher

die Anzahl Breter $\frac{22 \cdot 13 \cdot 45 \cdot 6}{7 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 5} = 78^{39}/_{49}$ oder 79 Stück.

60. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist

$$K = \pi r^2 h.$$

Wie viel Kubikzoll Wasser schafft eine Pumpe bei jedem Hube in die Höhe, wenn der Durchmesser des Stiefels im Lichten $6^3/_4$″, und die Hubhöhe 1′ $3^1/_4$″ beträgt?

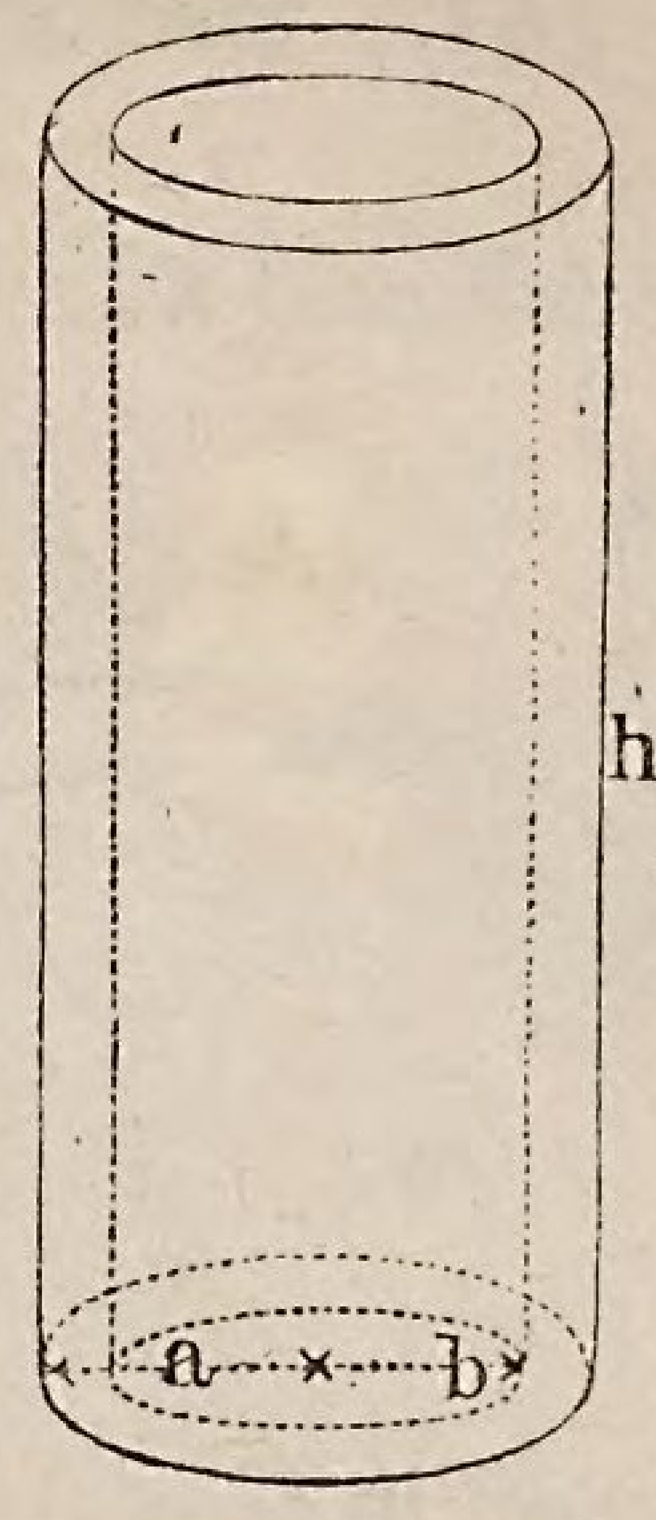
Es ist $r = 3^3/_8$″, $h = 15^1/_4$″, daher

$$K = \frac{22}{7}\,(3^3/_8)^2\,15^1/_4 = \frac{22 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 61}{7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4} = 546\ c''$$

beinahe oder $8^{17}/_{32}$ Quart.

61. Der Inhalt eines hohlen Cylinders oder einer Röhre, wenn a den äußern, b den innern oder lichten

Halbmesser und h die Höhe bezeichnet, ist



$$K = \pi h\,(a + b)\; a - b).$$

Wie viele Schachtruthen Mauerwerk sind an einem Brunnen von 48′ Tiefe, 3′ lichter Weite und 1 Stein Stärke?

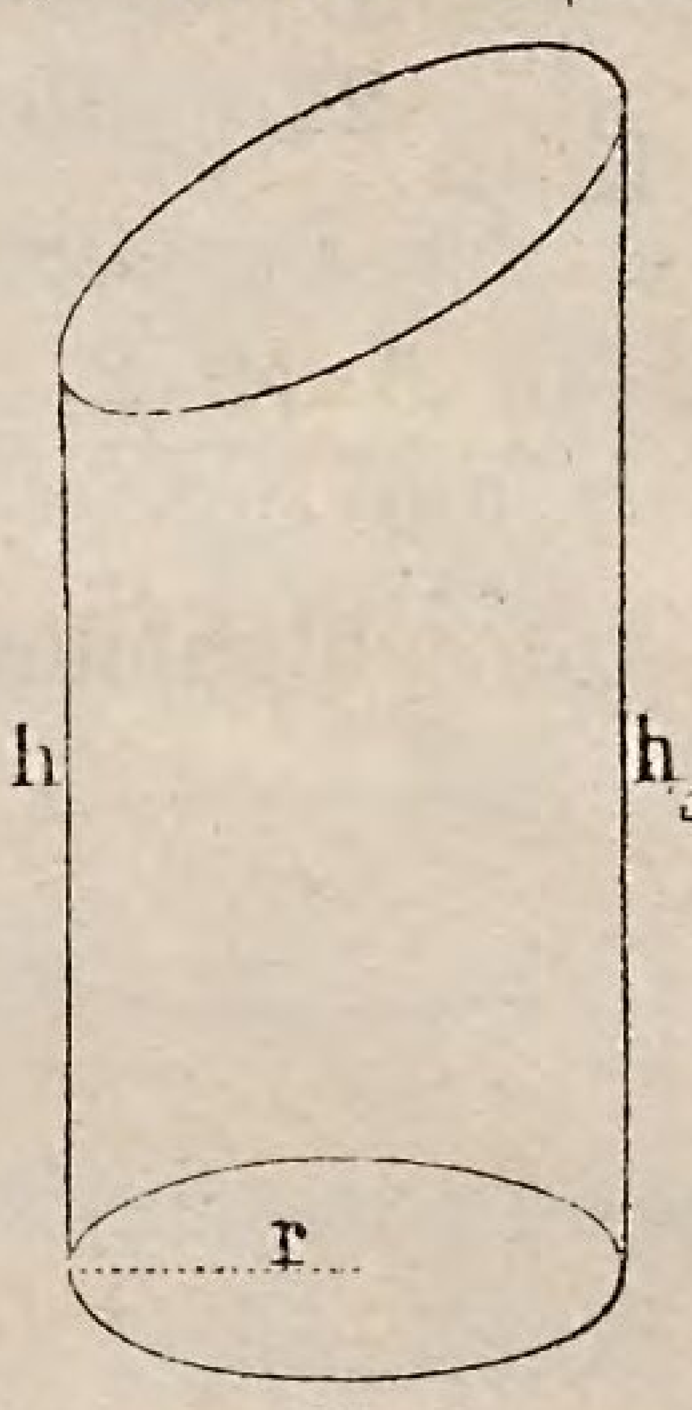
$h = 48'$, $a = 2^1/_3{}'$, $b = 1^1/_2{}'$, daher

$$K = \frac{22}{7} \cdot 48\,(2^1/_3 + 1^1/_2)\,(2^1/_3 - 1^1/_2)$$

$$= \frac{22 \cdot 48 \cdot 23 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 6}\; c' \text{ oder } \frac{22 \cdot 48 \cdot 23 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 144}$$

Schachtr. = 3 Schachtr. 50 c′ beinahe.

62. Der Inhalt eines schiefen abgeschnittenen Cylinders mit den Höhen h und h_1, wenn der Radius der Grundfläche = r ist, beträgt



$$K = \pi r^2 \frac{h + h_1}{2}.$$

Ist $r = 1'\,8''$, $h = 4'\,3''$, $h_1 = 5'\,2''$, so ist

$$K = \frac{22}{7} \cdot (1^2/_3)^2 \cdot \frac{4^1/_4 + 5^1/_6}{2} =$$

$$\frac{22 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 113}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 2} = 41\; c'\; 180^4/_7\; c''.$$

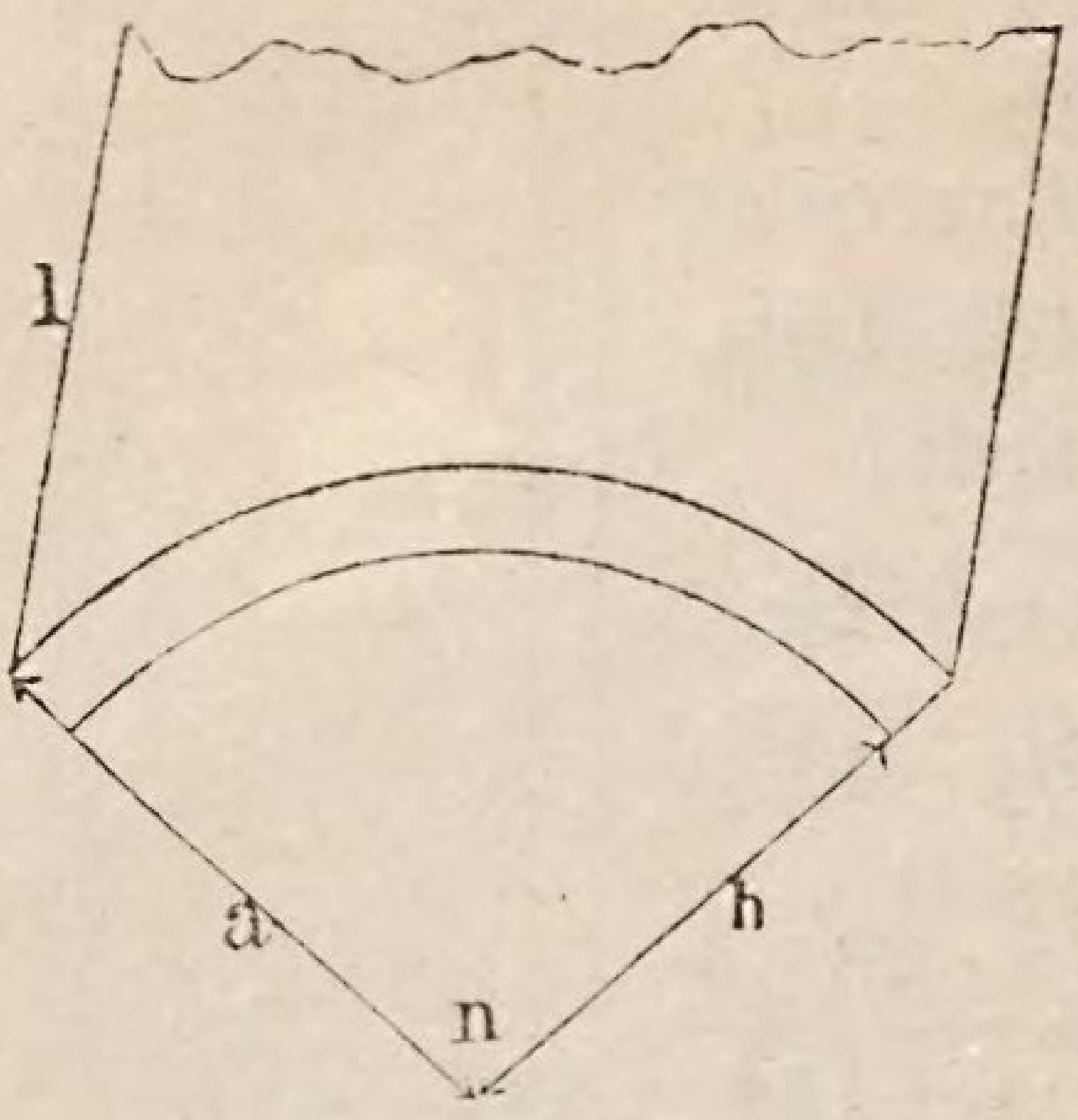
63. Der Mantel eines schief abgeschnittenen Cylinders, unter Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §, ist =

$$\pi r\,(h + h_1).$$

Ist $r = 3'\,4''$, $h = 5'\,9''$, $h_1 = 7'\,3''$, so ist die Fläche des Mantels $= \pi \cdot 3^1/_3\,(5^3/_4 + 7^1/_4) = \frac{22 \cdot 10 \cdot 13}{7 \cdot 3} =$

$136^4/_{21}$ □′.

64. Der Inhalt eines Gewölbes, wenn a den äußern, b den innern Halbmesser, n den Mittelpunktswinkel und l die Länge bezeichnet, ist =



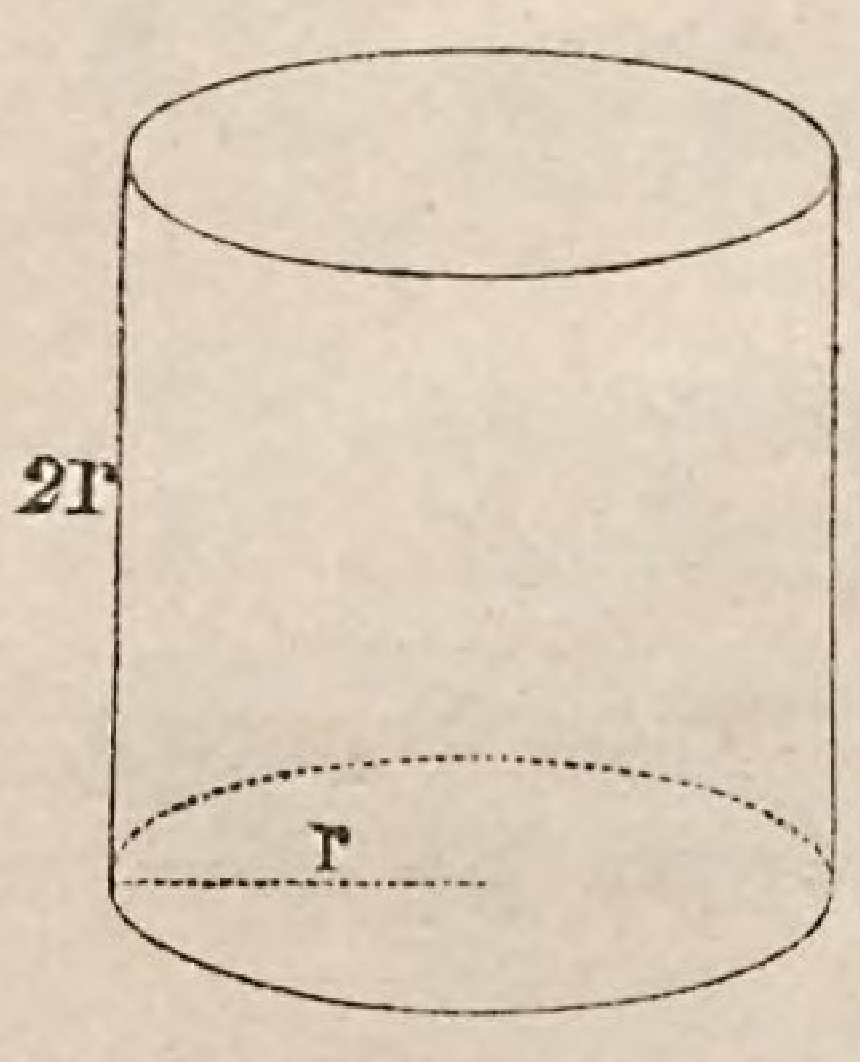
$$K = \frac{\pi n}{360} \cdot l\,(a + b)\,(a - b).$$

Wie viel Kubikfuß enthält ein Gurtbogen von 2′ Höhe, $1\frac{1}{2}$′ Stärke, wenn der zugehörige innere Halbmesser $8\frac{1}{2}$′ und der Mittelpunktswinkel = 45° gegeben ist?

Es ist $n = 45°$, $l = 1\frac{1}{2}$, $a = 10\frac{1}{2}$, $b = 8\frac{1}{2}$, daher

$$K = \frac{22}{7} \cdot \frac{45}{360}\, 1\tfrac{1}{2}\,(10\tfrac{1}{2} + 8\tfrac{1}{2})\,(10\tfrac{1}{2} - 8\tfrac{1}{2} = \frac{22 \cdot 45 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 2}{7 \cdot 360 \cdot 2} = 22\tfrac{11}{28}\ c'.$$

65. Von allen Cylindern, welche gleichen Inhalt haben, hat derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist.



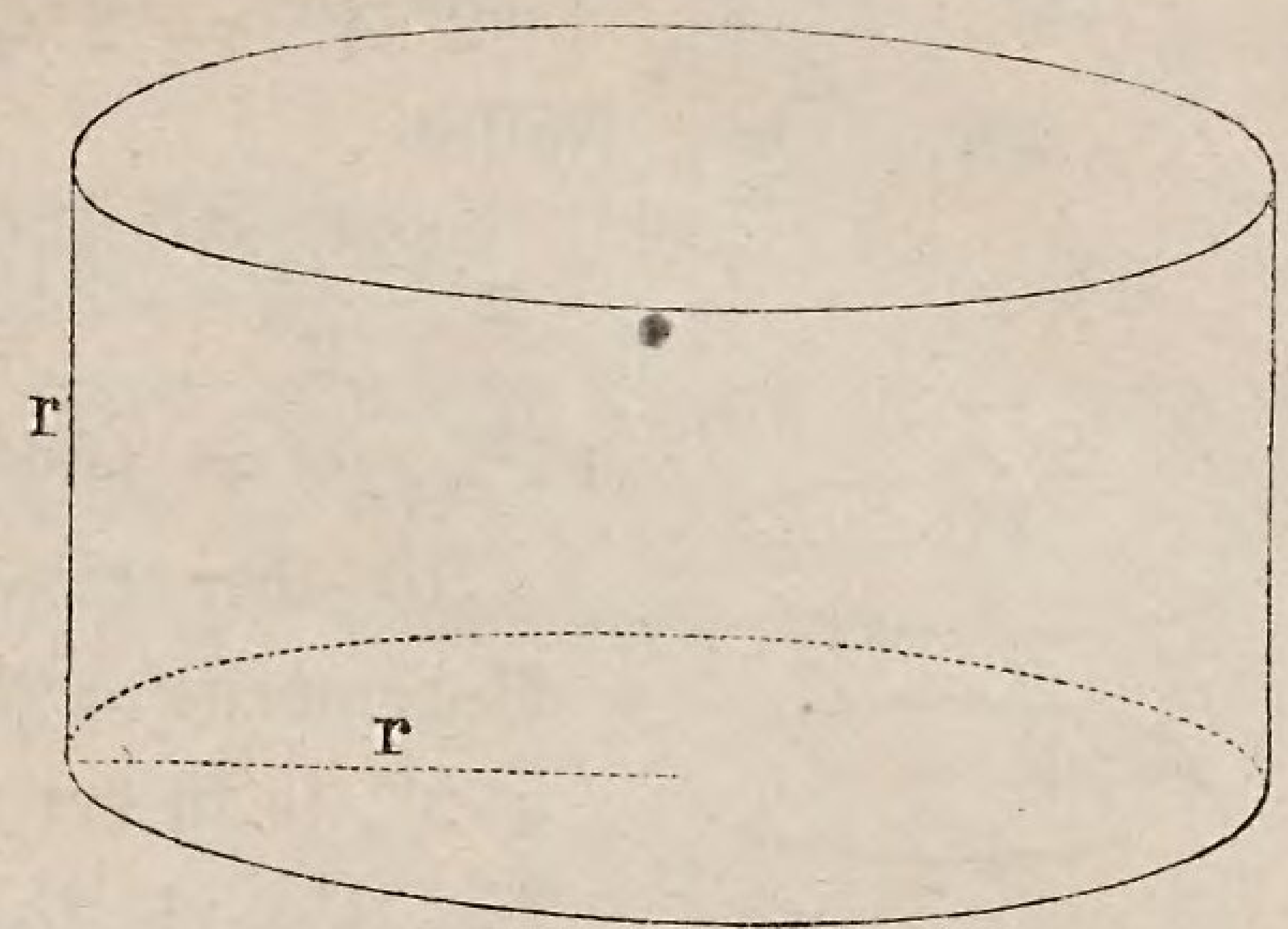
Welche Höhe muß ein Cylinder von 1000 c″ Inhalt haben, damit der Mantel nebst den beiden Grundflächen am kleinsten werde?

Bezeichnet x den Radius der Grundfläche, so muß die Höhe = 2x sein, mithin

$$\pi x^2 \cdot 2x = 1000, \text{ oder } x^3 = \frac{1000}{2\pi};\ x = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = 5{,}42''.$$

Der Durchmesser muß also gleich der Höhe zu 10,84″ angenommen werden.

66. Die Oberfläche eines hohlen, oben offenen Cylinders ist bei gegebenem Inhalte am kleinsten, wenn die Höhe desselben dem Radius der Grundebene gleich ist.



Welche Höhe und welchen Durchmesser muß ein Gasometer von der Form eines unten offenen, oben geschlossenen Cylinders von 25000 c′ Inhalt erhalten, damit die Oberfläche am kleinsten werde?

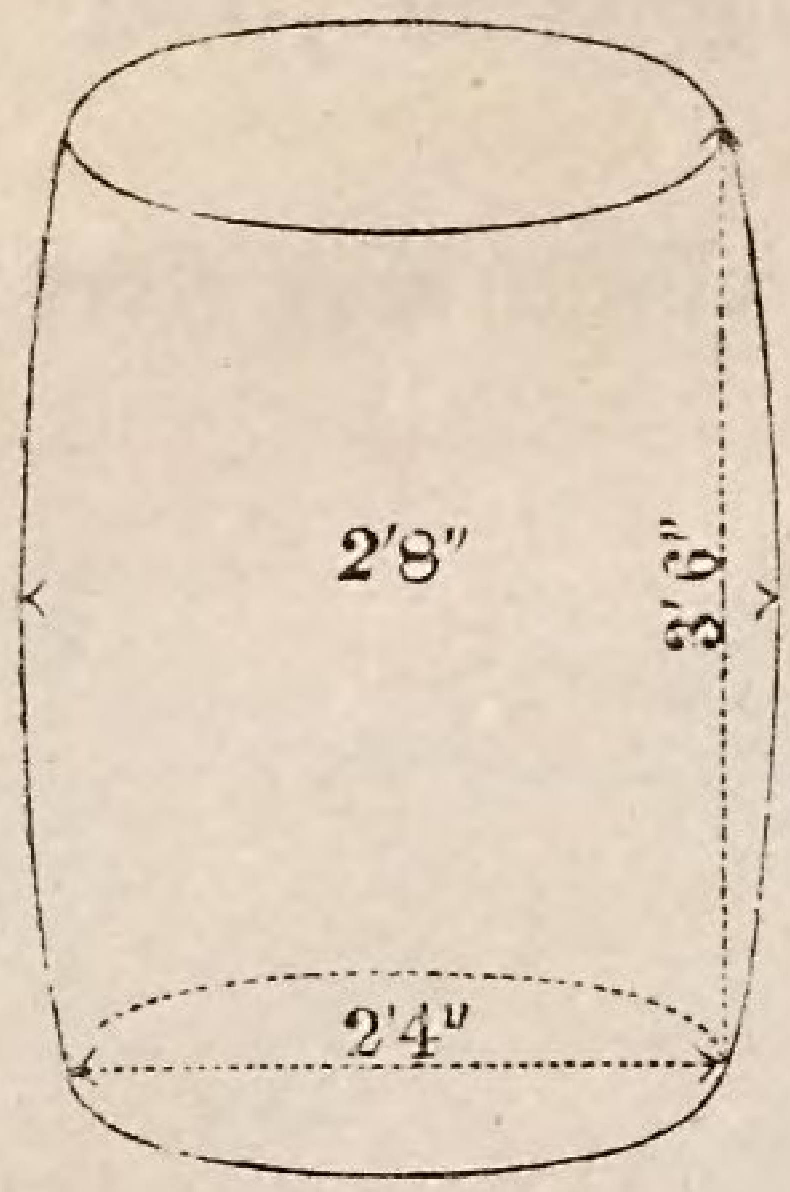
Ist x = dem Radius der Grundebene, so muß auch die Höhe = x sein, daher

$\pi x^2 \cdot x = 25000$ oder $\pi x^3 = 25000$ und $x = \sqrt[3]{\frac{25000}{\pi}} =$ 19′ 11,57″.

Die Höhe ist also 19′ 11,57″ und
der Durchmesser 39′ 11,14″.

67. Bei Fässern von nicht bedeutender Krümmung kann man das Faß als einen Cylinder betrachten, dessen Durchmesser dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Durchmessern des Fasses, in der Mitte und am Boden gemessen, gleichkommt.

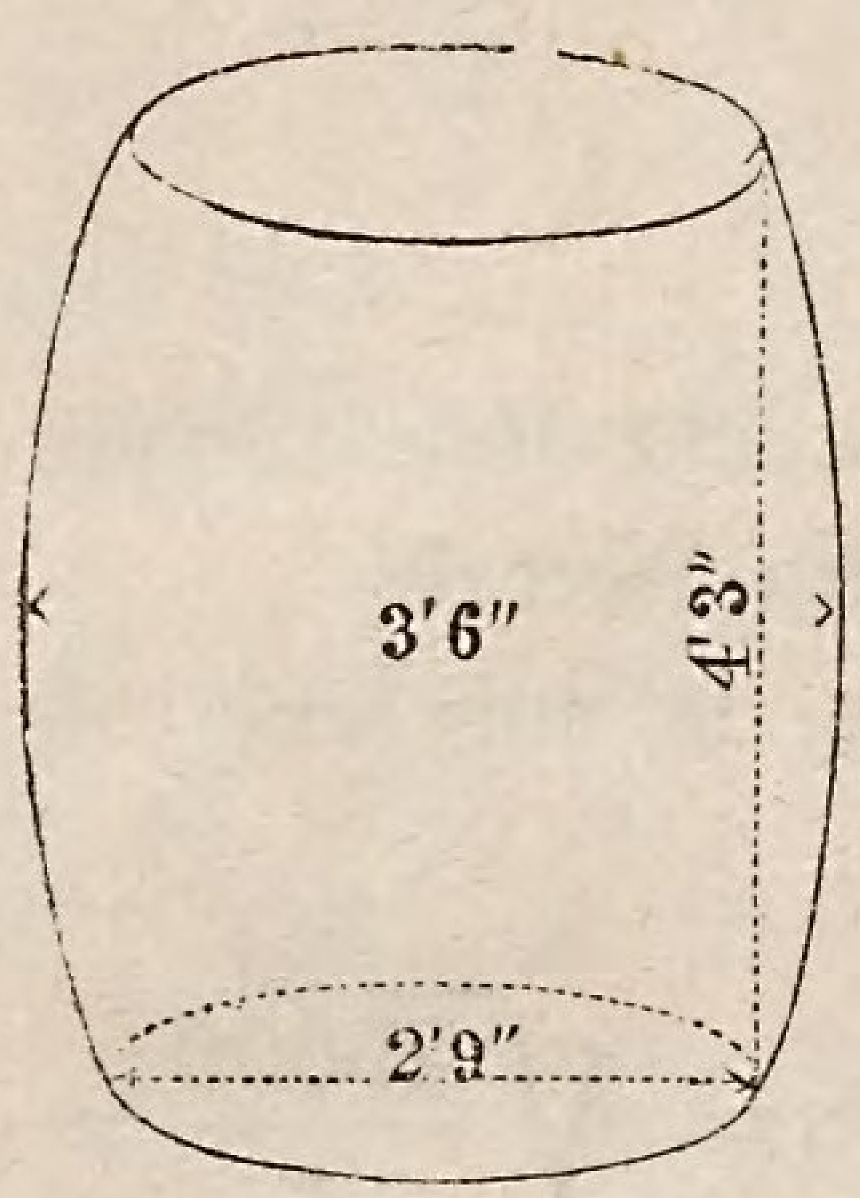
Bei Fässern von bedeutender Krümmung nimmt man $^2/_3$ des Durchmessers in der Mitte und $^1/_3$ des Durchmessers am Boden zusammen als Durchmesser eines Cylinders an, und dessen Höhe gleich der Länge des Fasses.



Ist z. B. die Spundtiefe 2′ 8″, die Bodenweite 2′ 4″ und die Länge 3′ 6″, so ist der mittlere Durchmesser $\frac{1}{2}$ (2′ 8″ + 2′ 4″) = $2\frac{1}{2}$′ und der Inhalt des Fasses

$$\pi \frac{(2\frac{1}{2})^2}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{22 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} =$$

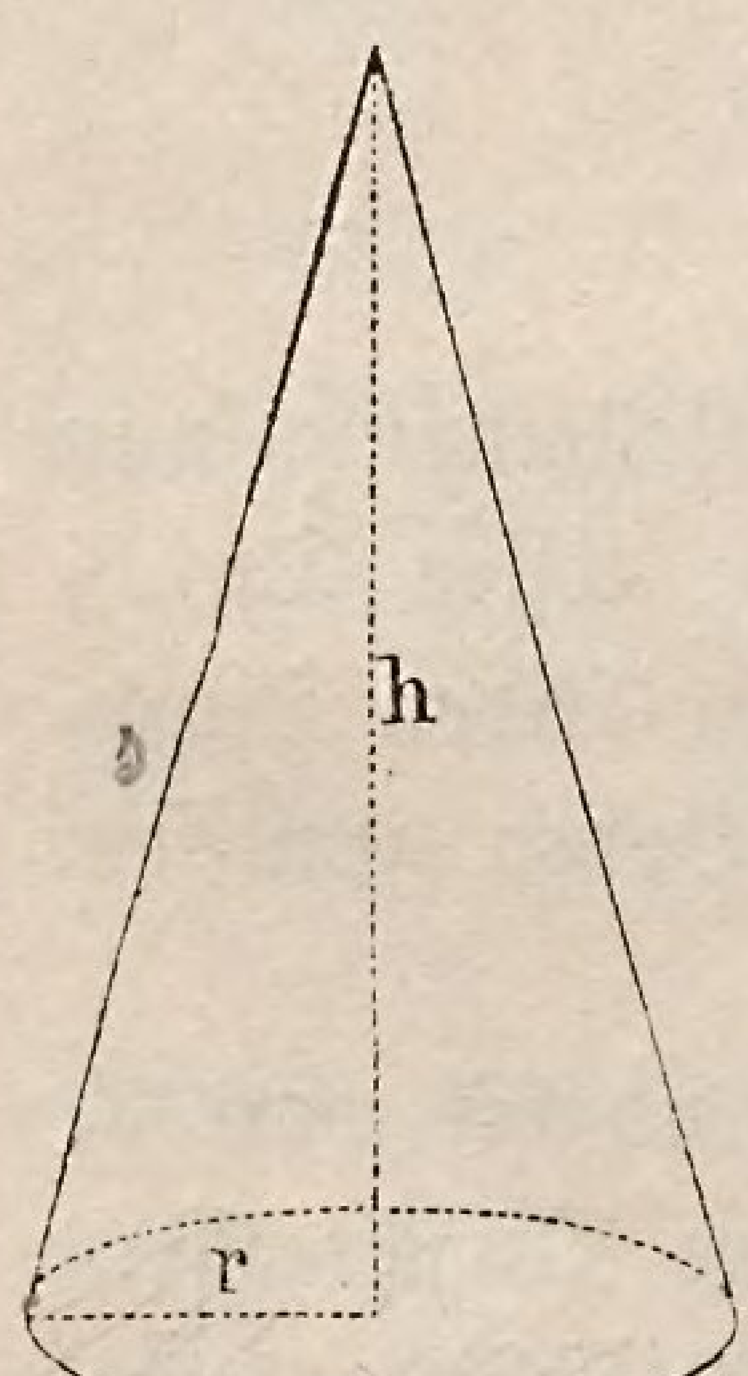
$17\frac{3}{16}$ c′ = $464\frac{1}{16}$ Quart.



Ist aber die Spundtiefe 3′ 6″, die Bodenweite = 2′ 9″, und die Länge = 4′ 3″, so ist der mittlere Durchmesser = $\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$′ und der Inhalt des Fasses =

$$\pi \frac{(3\frac{1}{4})^2}{2} \cdot 4\frac{1}{4} = \frac{22 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17}{7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4} =$$

35 c′ $468\frac{9}{14}$ c″ = 7 Ohm $112\frac{1}{3}$ Quart (1 Ohm = $4\frac{4}{9}$ c′ = 4 c′ 768 c″; 1 Ohm = 120 Quart).



68. Der Mantel eines normalen Kegels, dessen Halbmesser = r und dessen Höhe = h, ist, unter s die Seite verstanden, $= \pi r s$

oder $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$;

und die ganze Oberfläche

$$= \pi r\,(r + s) \text{ oder}$$
$$= \pi r\,(r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

Die kegelförmig geformte Decke eines cylindrischen Raumes von 13′ Durchmesser soll mit Glas eingedeckt werden; wie viel Glas

ist dazu erforderlich, wenn die Höhe des Dachkegels $3^5/_8{}'$ beträgt?

$$\pi \cdot 6^1/_2 \sqrt{(6^1/_2)^2 + (3^5/_8)^2} = \frac{22 \cdot 13}{7 \cdot 2} \sqrt{^{3545}/_{64}} =$$

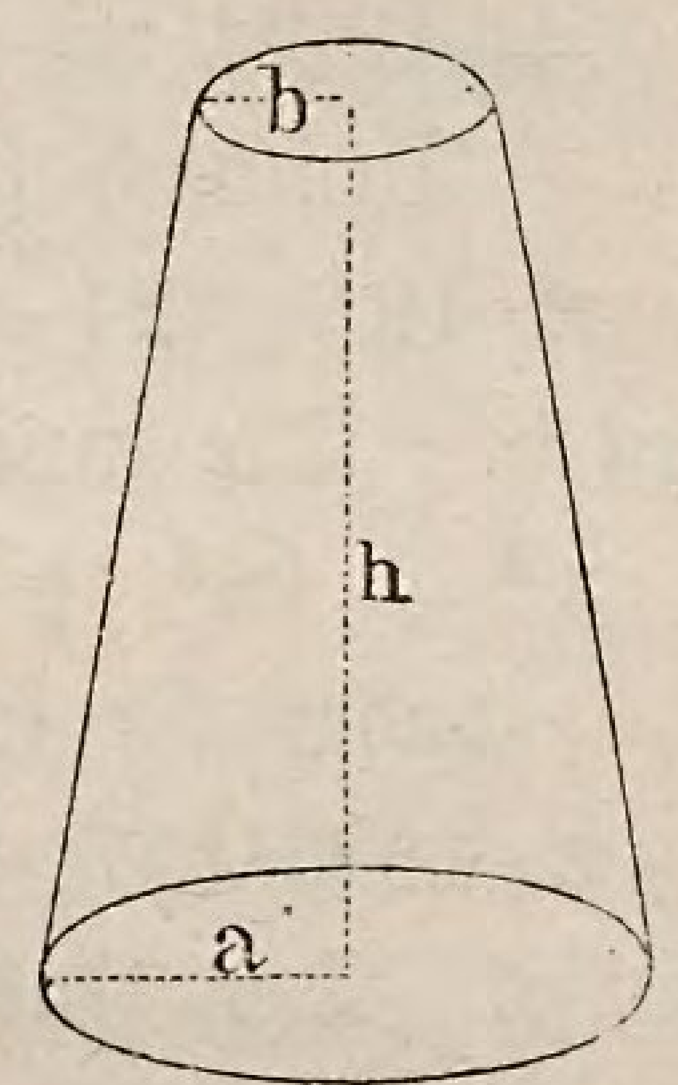
$$\frac{22 \cdot 13 \cdot 59^1/_2}{7 \cdot 2 \cdot 8} = 152\square' \text{ beinahe.}$$

69. Der Inhalt eines normalen Kegels ist =

$$K = {}^1/_3\, \pi r^2 h.$$

Hat ein Kegelventil $2^1/_8{}''$ Durchmesser und $^5/_8{}''$ Höhe, so ist dessen Inhalt $= {}^1/_3 \pi\ (1^1/_{16})^2 \cdot {}^5/_8 = 0{,}74\ c''$ beinahe.

70. Der Inhalt eines abgekürzten Kegels, wenn a und b die Radien der Grundflächen und h die Höhe, d. i. den normalen Abstand der beiden Grundflächen bezeichnet, ist



$$K = \frac{\pi h}{3}\ (a^2 + b^2 + ab).$$

Eine steinerne Säule habe einen Durchmesser von 3′ 6″, und verjünge sich nach oben um $^1/_6$; die Höhe betrage 32′ 3″, wie groß ist der Inhalt?

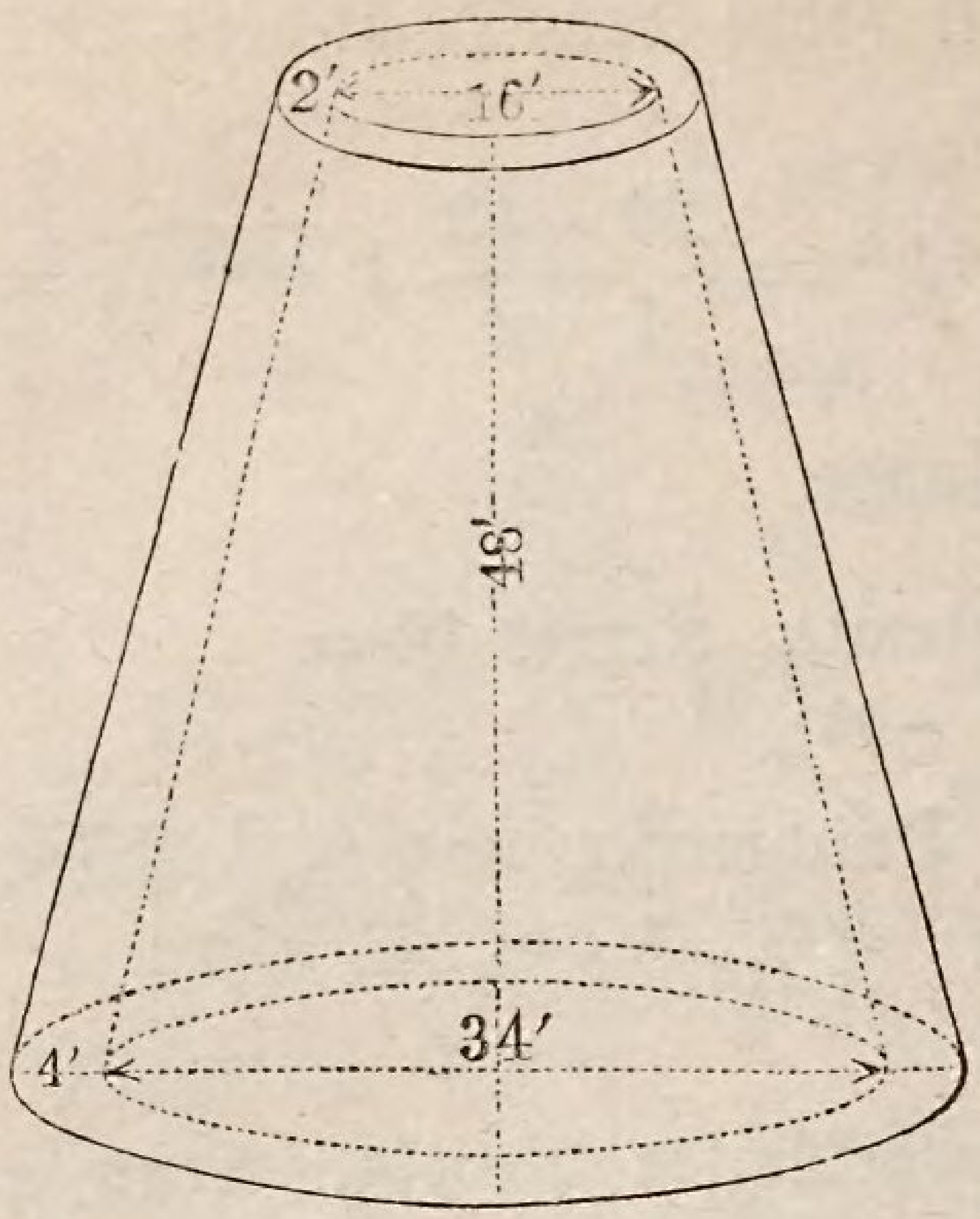
Es ist $a = 1^3/_4{}'$, $b = 1^{11}/_{24}{}'$, daher

$$K = \pi \cdot \frac{32^1/_4}{3}\ [(1^3/_4)^2 + (1^{11}/_{24})^2 + 1^3/_4 \cdot 1^{11}/_{24}] =$$

$$\frac{12 \cdot 129 \cdot 4459}{7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 24} = 261\ c'\ 943^1/_2\ c''.$$

71. Der Mantel eines abgekürzten Kegels, wenn a und b die Radien der Grundfläche und s die Seite des Kegels bezeichnet, ist $= \pi s\ (a + b)$.

Eine Windmühle habe unten eine lichte Weite von 34′,



oben von 16'. Die Mauer sei unten 4', oben 2' stark und 48' hoch. Wie groß ist

a) die äußere Putzfläche;

b) die innere Putzfläche, und

c) der Inhalt des Mauerwerks in Schachtruthen?

ad a. Zuvörderst ist die äußere Seite zu berechnen. Nach §. 7 ist, wenn diese Seite mit x bezeichnet wird, $x^2 = 48^2 + 11^2$; $x = \sqrt{2425} = 49{,}24' = 49'\ 3''$.

Demnach ist die äußere Putzfläche =

$\pi \cdot 49\,^1/_4\,(21 + 10) = 4798\,^5/_{14}\square' = 33\square^\circ\ 46\,^5/_{14}\square'$.

ad b. Die innere Seite wird gefunden durch

$x^2 = 48^2 + 9^2$; $x = \sqrt{2385} = 48',83 = 48'\ 10''$;

daher die innere Putzfläche =

$\pi \cdot 48\,^5/_6\,(17 + 8) = 3836\,^{19}/_{21}\square' = 26\square^\circ\ 92\,^{19}/_{21}\square'$.

ad c. Der Inhalt des Mauerwerks wird gefunden, indem man die Windmühle als volle Masse annimmt, diesen Körper als abgekürzten Kegel berechnet, und dann den Inhalt des innern hohlen Kegels von dem gefundenen Inhalte abzieht.

Für die erste Berechnung ist $a = 21'$, $b = 10'$, $h = 48'$,
" " zweite " $a = 17'$, $b = 8'$, $h = 48'$,

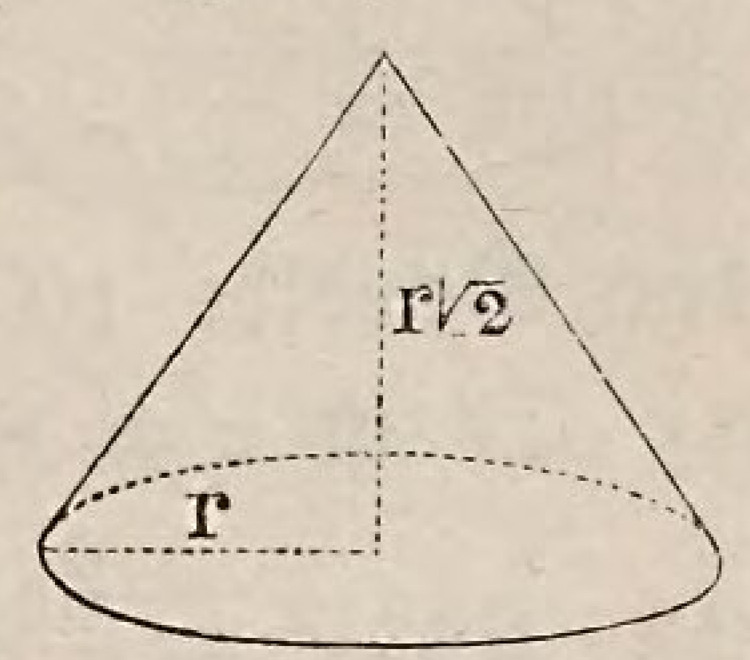
daher der Inhalt des Mauerwerks =

$$\frac{\pi \cdot 48}{3}(21^2 + 10^2 + 21 \cdot 10) - \frac{\pi \cdot 48}{3}(17^2 + 8^2 + 17 \cdot 8) =$$

$\pi \cdot 16\,(21^2 + 10^2 + 21 \cdot 10 - 17^2 - 8^2 - 17 \cdot 8)$ c', oder

in Schachtruthen $= \frac{\pi \cdot 16}{144} \cdot 262 = \frac{22 \cdot 16 \cdot 262}{7 \cdot 144} =$ $91^{31}/_{63}$ Schachtr. = 31 Schachtr. $70^{6}/_{7}$ c′.

72. Unter allen normalen Kegeln von gleichem Inhalte hat derjenige die kleinste Mantelfläche, bei welchem das Verhältniß des Halbmessers der Grundebene zur Höhe ist = $1 : \sqrt{2}$.



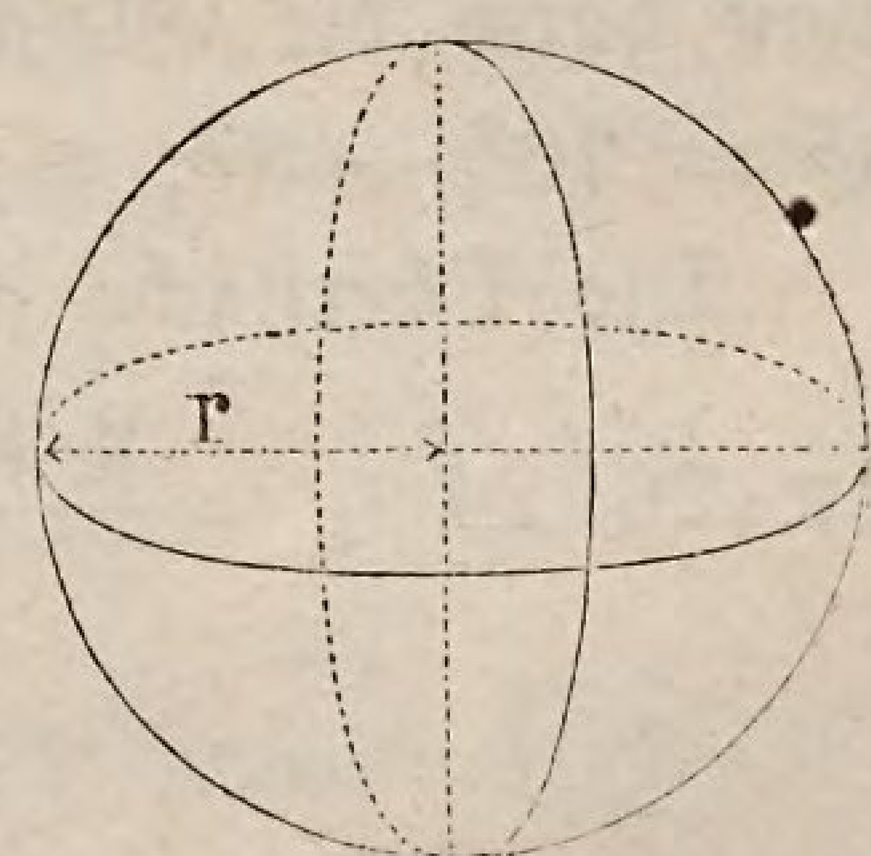
Wie groß ist demnach die Höhe, wie groß der Radius der Grundebene eines normalen Kegels von 1000 c″ Inhalt zu nehmen, damit die Mantelfläche am kleinsten werde?

Ist x der Radius der Grundebene, so ist die Höhe = $x\sqrt{2}$, daher für den Inhalt die Gleichung:

$$\frac{\pi x^2 \cdot x\sqrt{2}}{3} = 1000;\ x = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 3}{\pi\sqrt{2}}} = 8{,}774''.$$

Der Halbmesser ist also = 8,774″ und die Höhe $= 8{,}774 \cdot \sqrt{2} = 8{,}774 \cdot 1{,}414 = 12{,}406''$.

73. Die Oberfläche einer Kugel, deren Radius = r, ist = $4\pi r^2$ d. i. dem 4fachen Inhalte des größten Kreises.

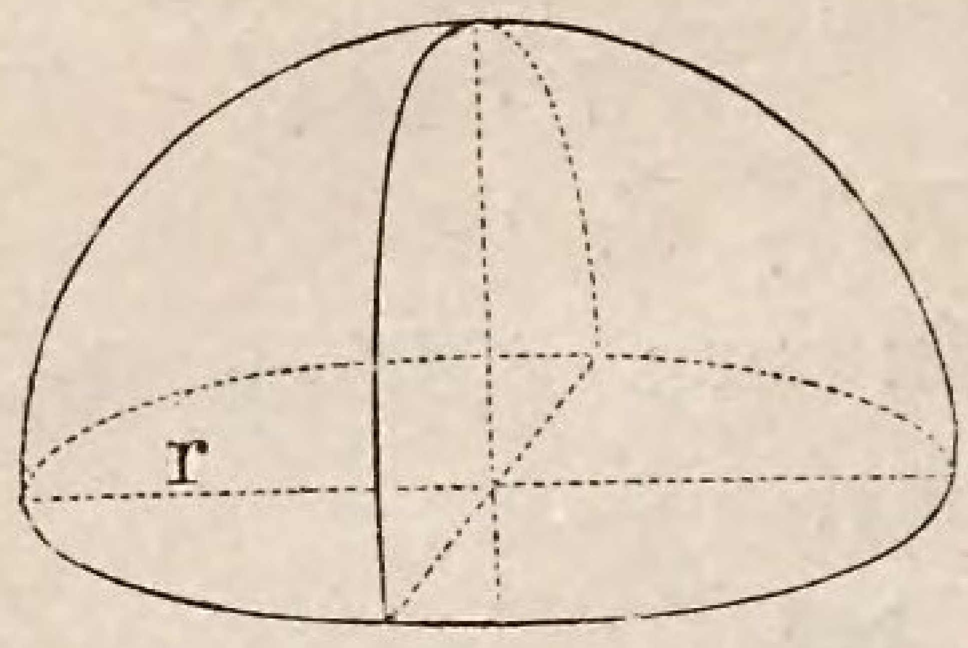


Ein Thurmknopf in Form einer Kugel von 3′ 7″ Durchmesser soll übergoldet werden, wie viel beträgt die zu vergoldende Fläche?

Es ist r = 1′ $9^{1}/_{2}$″, daher die Oberfläche

$$4 \cdot \frac{22}{7} (1^{19}/_{24})^2 = 40^{179}/_{504} \square' = 40 \square' \; 51^{1}/_{7} \square'.$$

74. Die krumme Oberfläche einer Halbkugel ist =



$2\pi r^2$

und die ganze Oberfläche =

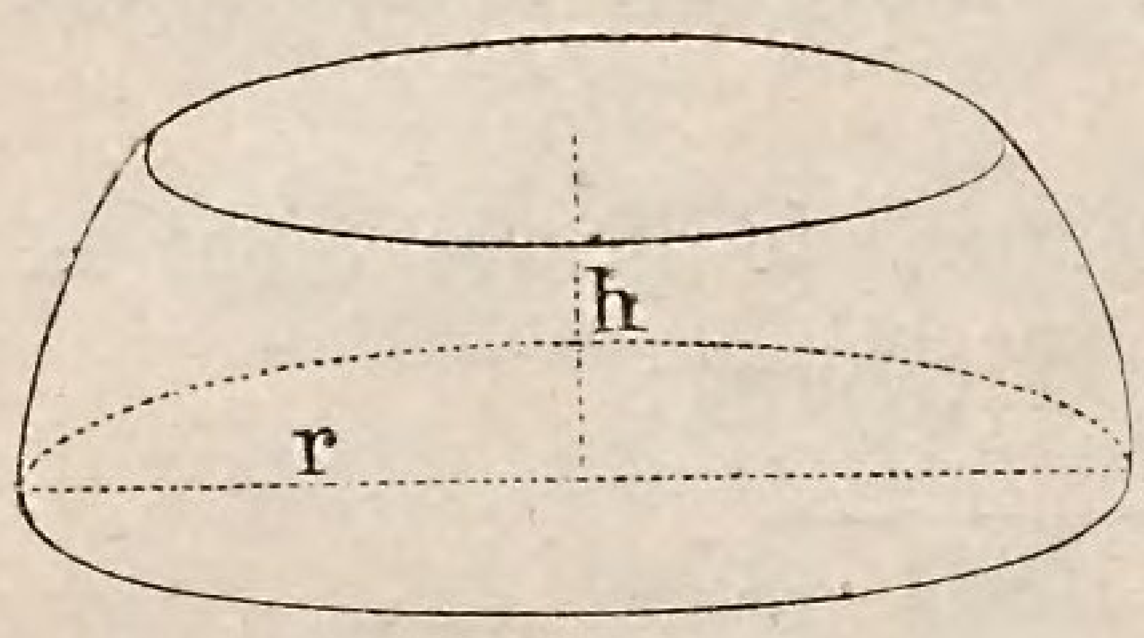
$3\pi r^2$.

Welche Oberfläche hat ein Kuppelgewölbe von 12′ lichter Weite, wenn das Gewölbe 10″ stark ist?

Es ist r = 6′ 10″, daher die Oberfläche =

$$2\pi \cdot (6^5/_6)^2 = \frac{2 \cdot 22 \cdot 41 \cdot 41}{7 \cdot 6 \cdot 6}\ 293\square'\ 73^1/_7\square''.$$

75. Der Inhalt (krumme Oberfläche) einer Zone, deren



Höhe = h, und wenn der Radius der Kugel = r ist, beträgt

$2\pi r h$.

Eine Kuppel von 52′ Durchmesser soll im Scheitel mit einer Laterne von 16′ Durchmesser versehen, im übrigen aber mit Blei eingedeckt werden. Wie groß ist die mit Blei zu belegende Fläche?

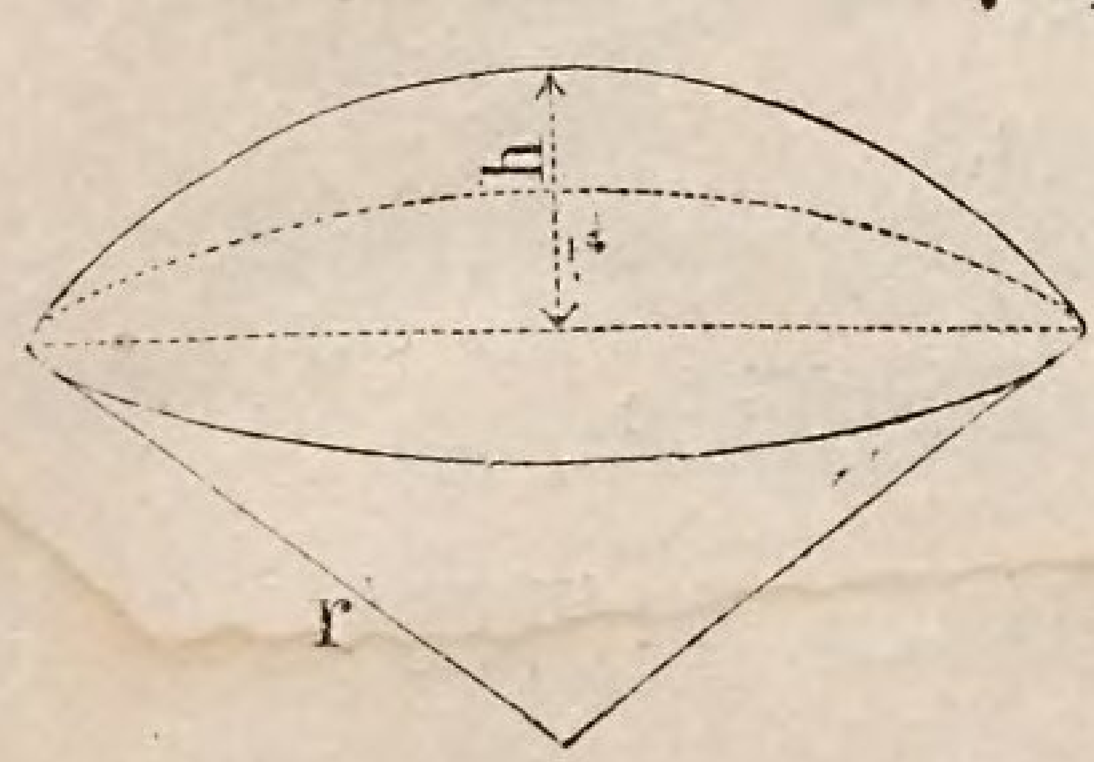
Zur Berechnung ist die Höhe h erforderlich. Diese findet man durch die Gleichung

$$x^2 = 26^2 - 8^2;\ x = \sqrt{612} = 24{,}74 = 24'\ 9''.$$

Die Oberfläche ist demnach =

$$2\pi \cdot 26 \cdot 24^3/_4 = \frac{2 \cdot 22 \cdot 26 \cdot 99}{7 \cdot 4} = 4044^6/_7\square' = 4044\square'$$

$123^3/_7\square''$.



76. Der Inhalt (krumme Oberfläche) einer Calotte, deren Höhe = h, und wenn der Radius der Kugel = r, ist = $2\pi r h$.

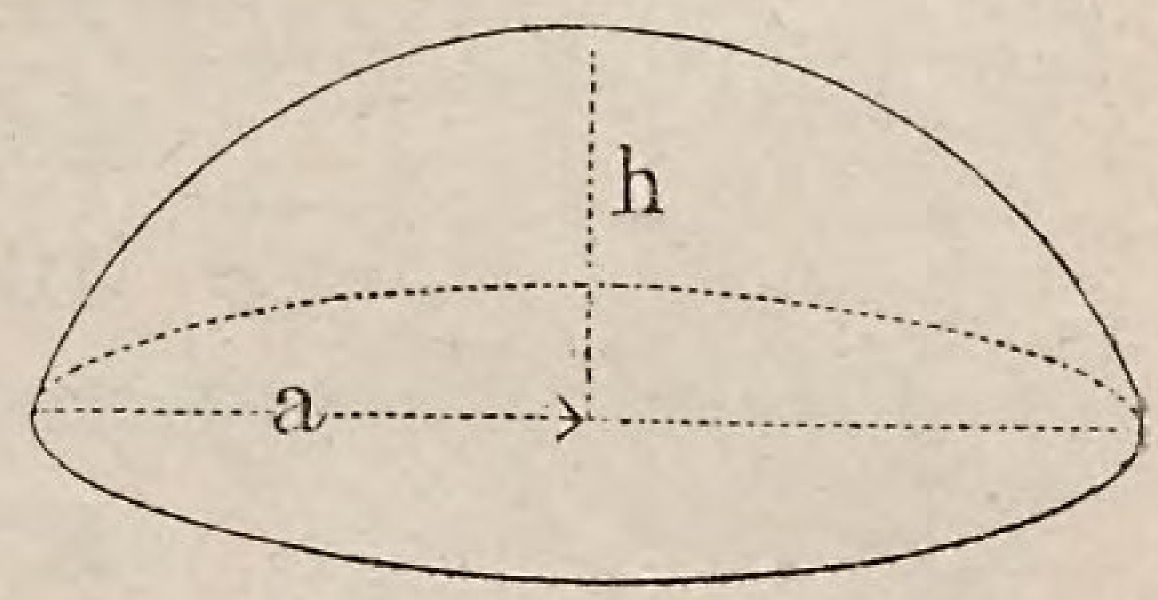
Soll die in der Aufgabe des vorigen Paragraphen bezeichnete Laterne mit Glas eingedeckt werden, so findet man die Fläche wie folgt:

Die Höhe h der Calotte ist $= 26' - 24'\ 9'' = 1'\ 3''$, daher die Oberfläche =

$$2\pi \cdot 26 \cdot 1^1/_4 = \frac{2 \cdot 22 \cdot 26 \cdot 5}{7 \cdot 4} = 204^2/_7\Box' = 204\Box'$$ $41^1/_7\Box''$.

77. Der Inhalt einer Calotte, wenn der Radius des begrenzenden Kreises = a und die Höhe = h gegeben, ist =

$$\pi\,(a^2 + h^2).$$



Ein Kuppelgewölbe, dessen Widerlager mit dem Mittelpunkte der Kugel nicht in einer Ebene liegen, habe eine lichte Weite von $15^1/_2'$, eine Stärke von $10''$ und eine lichte Höhe von $5'\ 8''$; wie groß ist die äußere, wie groß die innere Oberfläche?

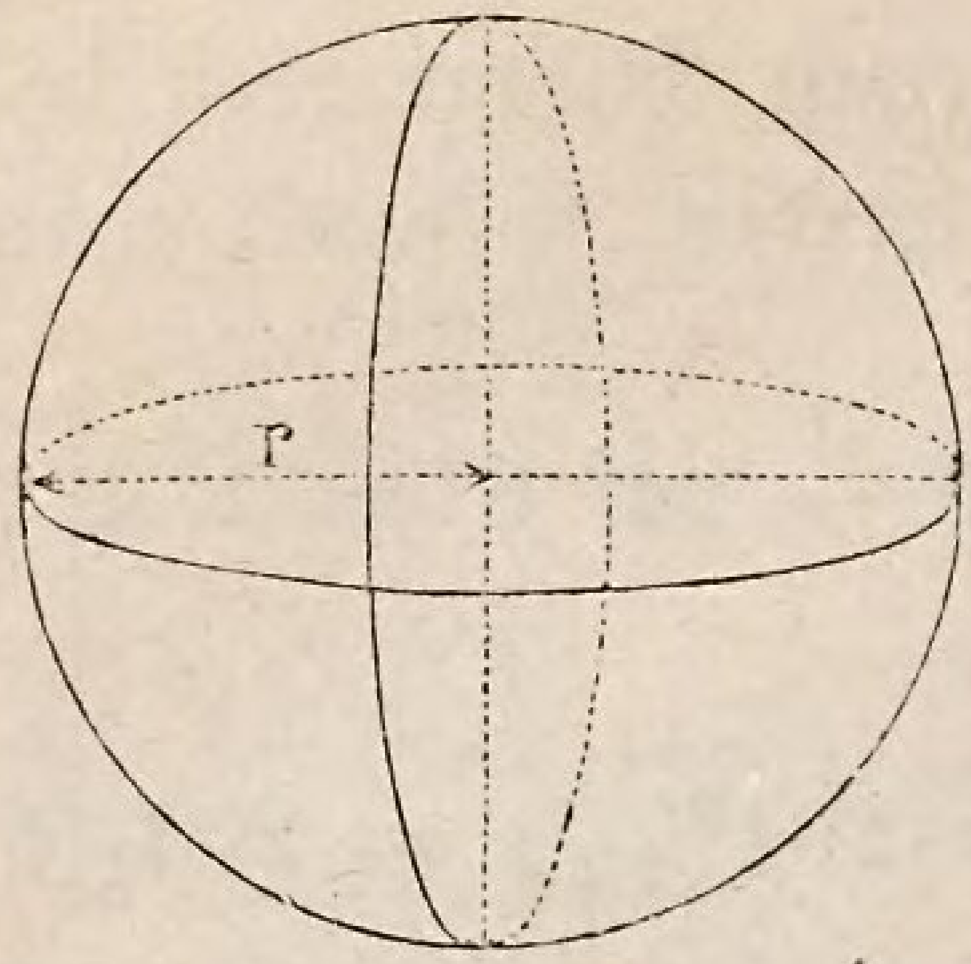
Für die äußere Oberfläche ist $a = 8^7/_{12}'$, $h = 6^1/_2'$, daher die Oberfläche $= \frac{22}{7}\,[(8^7/_{12})^2 + (6^1/_2)^2] = \frac{22 \cdot 16693}{7 \cdot 144} =$ $364^{167}/_{504}\Box' = 364\Box'\ 47^5/_7\Box''$.

Für die innere Oberfläche ist $a = 7^3/_4'$, $h = 5^2/_3'$, daher die Oberfläche $= \frac{22}{7}\,[(7^3/_4)^2 + (5^2/_3)^2] = \frac{22 \cdot 13273}{7 \cdot 144} =$ $289^{347}/_{504}\Box' = 289\Box'\ 99^1/_7\Box''$.

78. Der körperliche Inhalt einer Kugel, deren Radius = r, ist =

$$K = {}^4/_3\ \pi r^3.$$

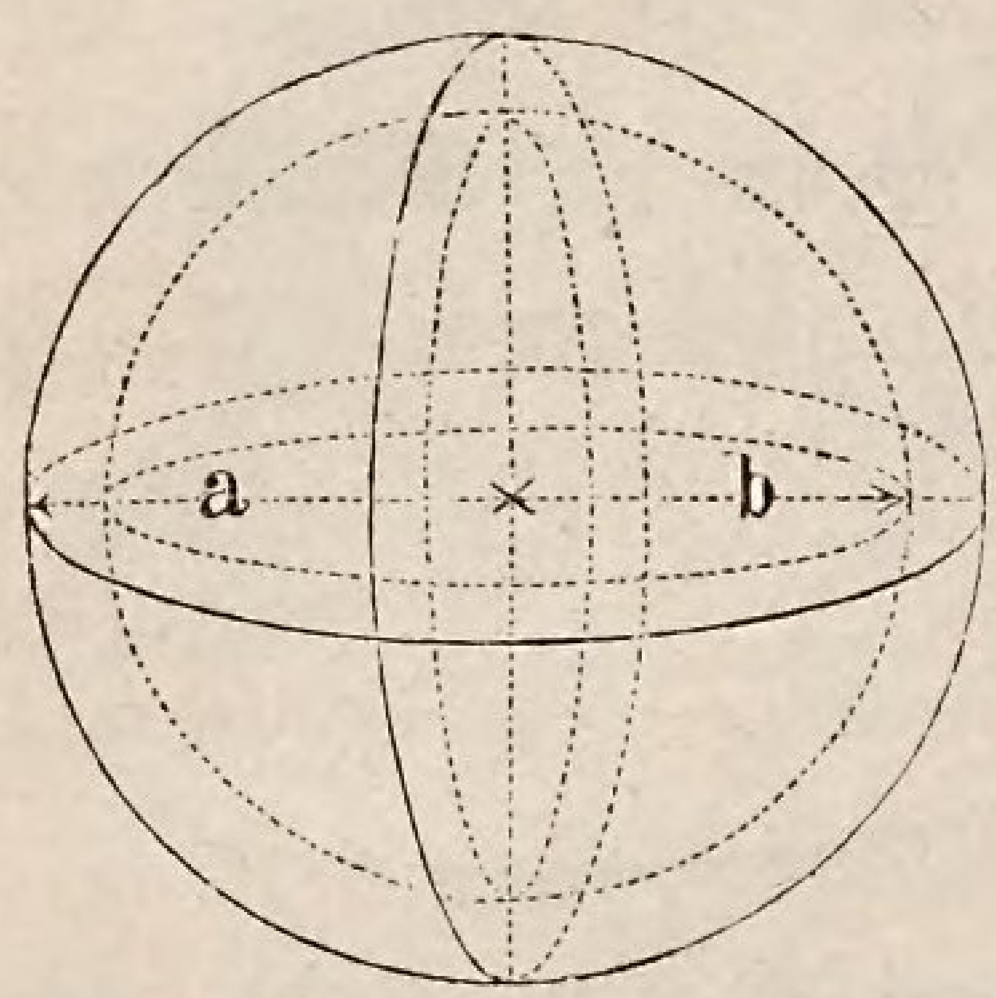
Eine metallene Kugel habe einen Durchmesser von $4^1/_2''$



wie schwer ist dieselbe, wenn jeder c'' $8\frac{1}{2}$ Lth. wiegt?
$\frac{4}{3}\pi (2\frac{1}{4})^3 \cdot 8\frac{1}{2} = 405\frac{81}{112}$ Lth. = 13 Pfd. $15\frac{81}{112}$ Lth.

79. Der Inhalt einer Hohlkugel, deren äußerer Radius = a und deren innerer Radius = b, ist =

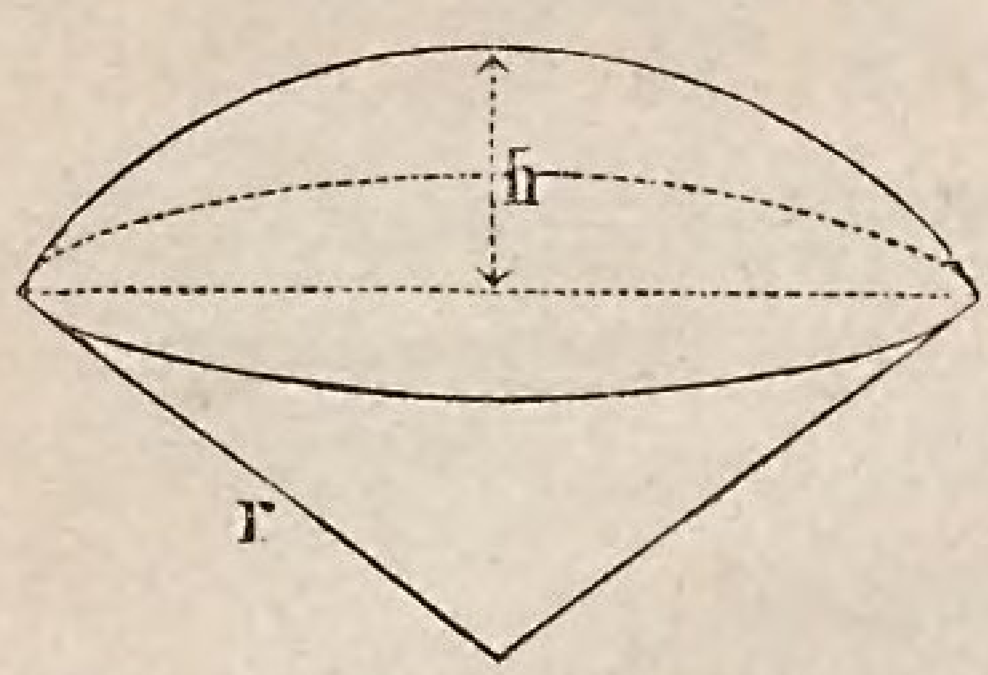
$$K = \frac{4}{3}\pi (a^3 - b^3).$$



Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kuppelgewölbes, dessen lichte Weite 18' und dessen Stärke 10'' ist?

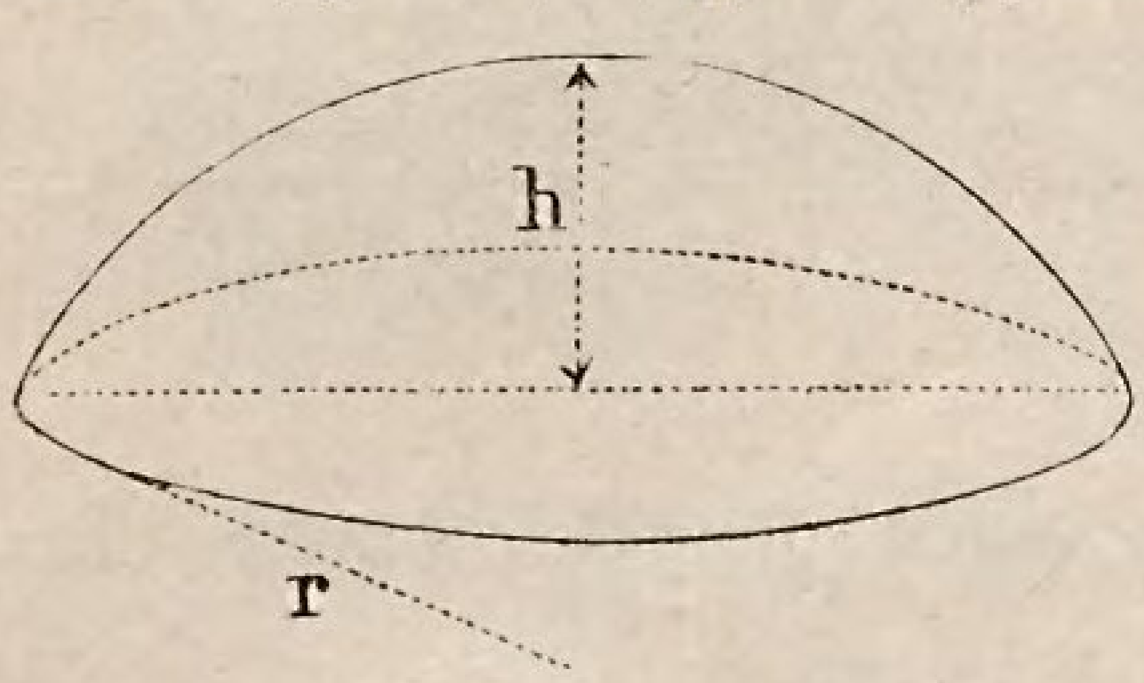
Es ist $a = 9\frac{5}{6}'$, $b = 9'$, daher $K = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi [(9\frac{5}{6})^3 - 9^3] = 464\frac{127}{162}$ c' = 3 Schachtruthen $32\frac{127}{162}$ c'.

80. Der Inhalt eines Kugelausschnitts, wenn r = dem Halbmesser der Kugel und h = der Höhe der begrenzenden Calotte, ist =



$$K = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Ist $r = 8'\ 9''$, $h = 1'\ 8''$, so ist $K = \frac{2}{3}\pi (8\frac{3}{4})^2 \cdot 1\frac{2}{3} = 267\frac{13}{36}$ c'.

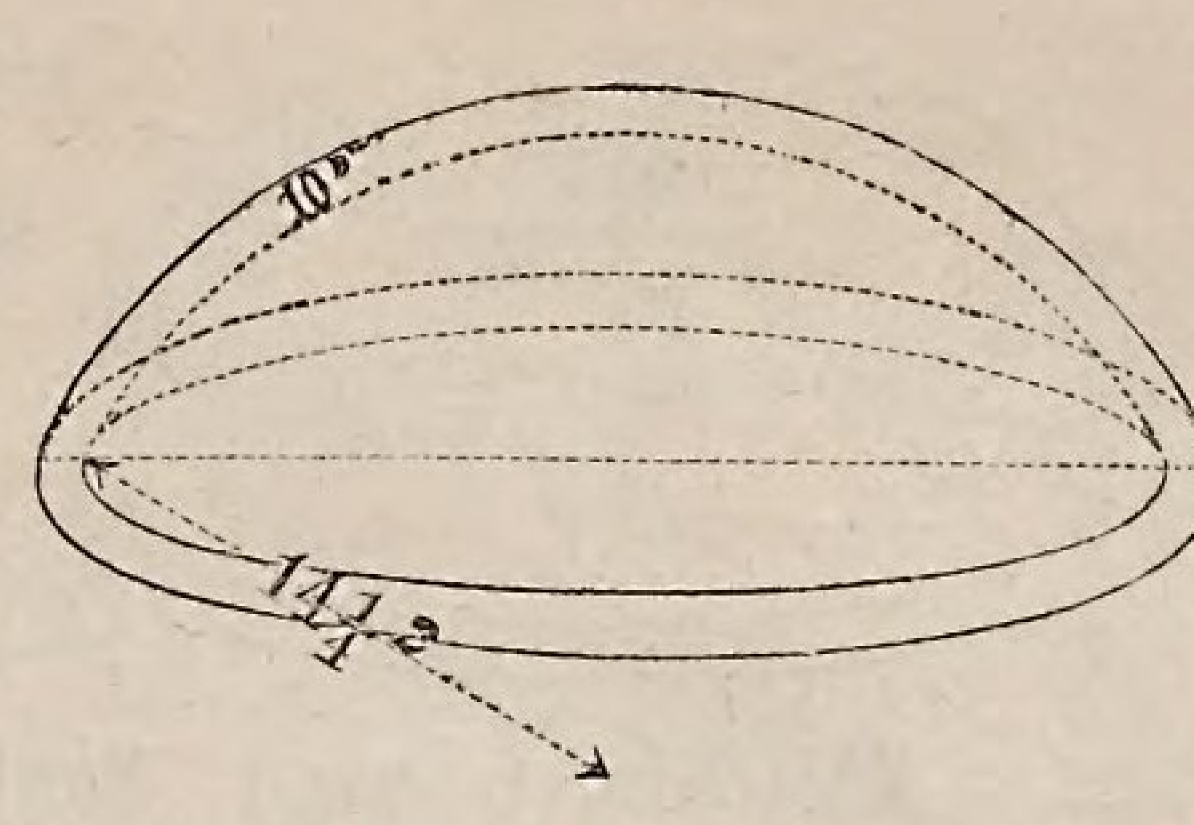


81. Der Inhalt eines Kugelabschnitts, unter r den Radius der Kugel und unter h die Höhe des Kugelabschnitts verstanden, ist

$$K = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h).$$

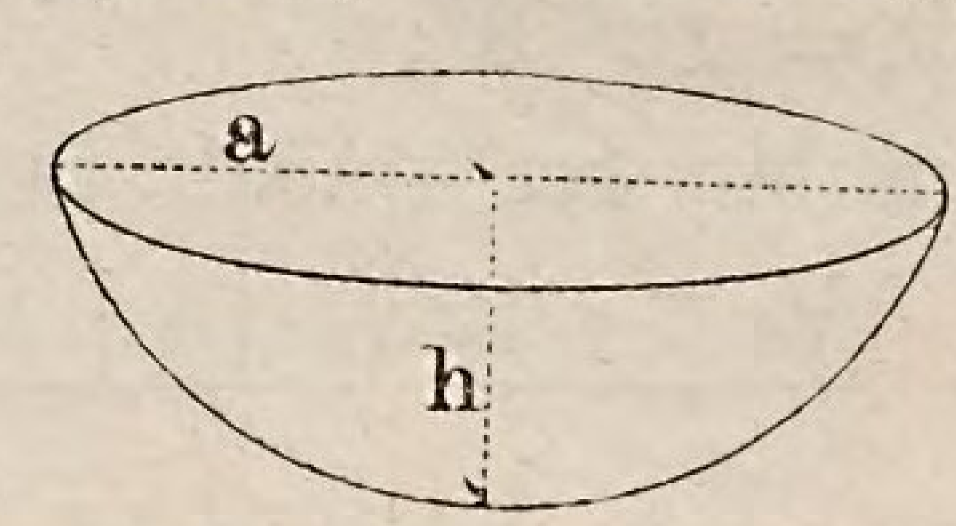
Es soll der körperliche Inhalt eines Kuppelgewölbes von $11\frac{1}{4}'$ lichter Höhe und 10'' Stärke, wenn der Radius

der Kuppel $11\frac{1}{4}'$ ist, berechnet werden; die Anfänger liegen concentrisch, jedoch mit dem Mittelpunkte der Kuppel nicht in einer Ebene.



Der äußere Radius ist $= 15\frac{1}{12}'$, die äußere Höhe $= 12\frac{1}{12}'$, der innere Radius $= 14\frac{1}{4}'$, die innere Höhe $= 11\frac{1}{4}'$, daher der Inhalt $K = \frac{1}{3}\pi\,(12\frac{1}{12})^2\cdot(3\cdot 15\frac{1}{12} - 12\frac{1}{12}) - \frac{1}{3}\pi\cdot(11\frac{1}{4})^2$ $(3\cdot 14\frac{1}{4} - 11\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{739450}{6\cdot 144} = 896\frac{2719}{4536}\ c' =$ 6 Schachtr. $32\frac{3}{5}\ c'$ beinahe.

82. Der Inhalt eines Kugelabschnitts, wenn a den Radius der begrenzenden Kreisebene und h die Höhe bezeichnet, ist =



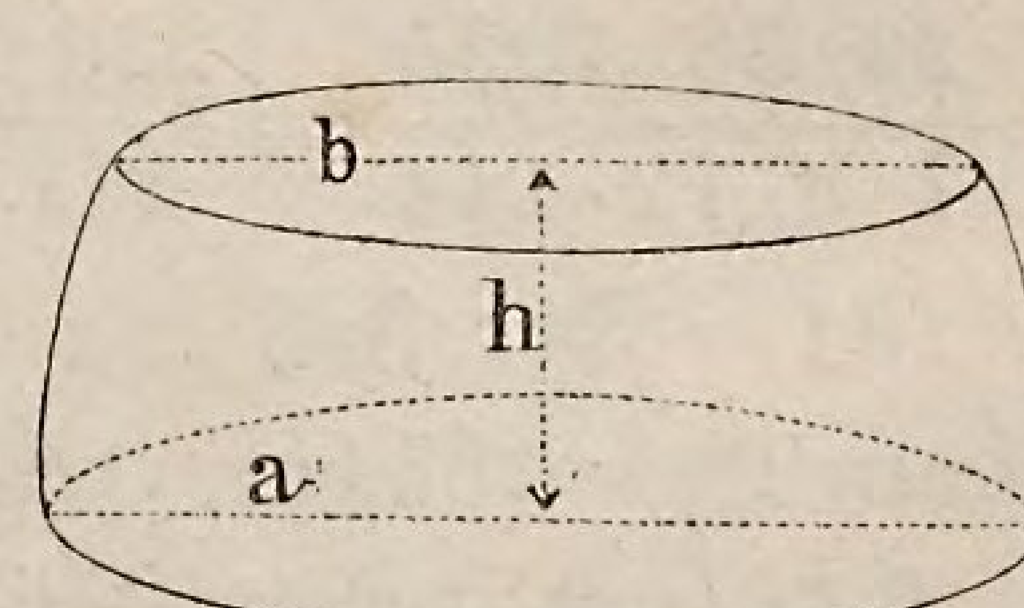
$$K = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + h^2).$$

Ein Gefäß in Form eines Kugelabschnitts habe eine lichte Weite von 3′ 8″ und eine Höhe von 1′ 6″; wie viel Quart faßt dasselbe?

$\frac{1}{6}\pi\cdot 18\,(3\cdot 22^2 + 18^2)\ c''$, oder

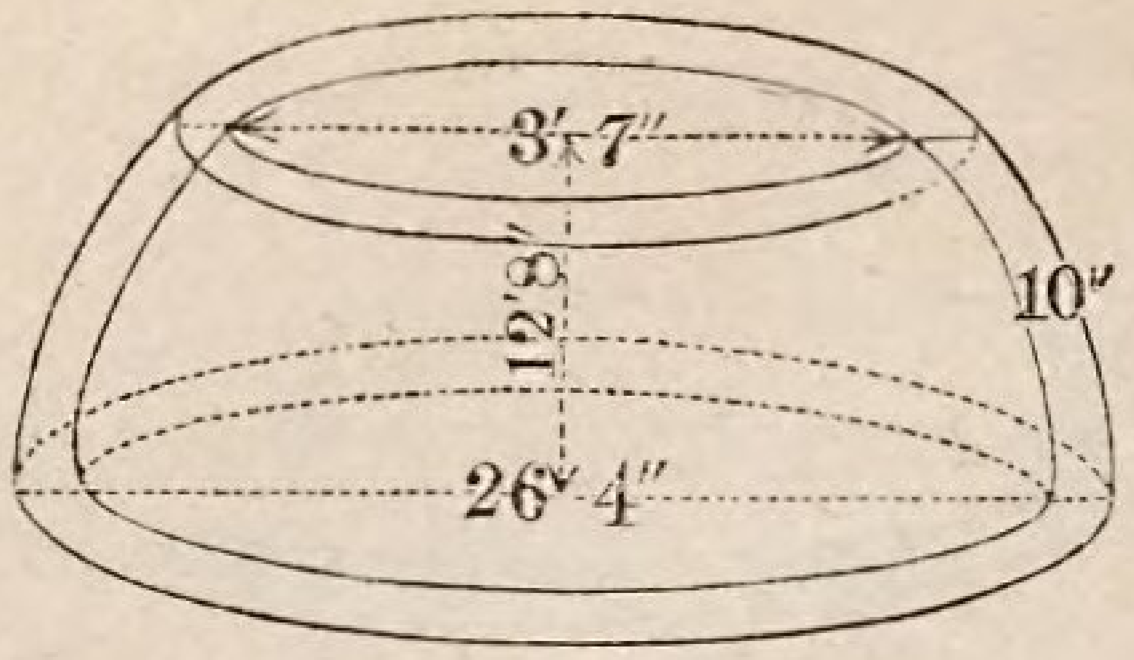
$$\frac{1}{6}\pi\cdot\frac{18\cdot(3\cdot 22^2 + 18^2)}{64}\ \text{Quart} = 261\frac{9}{14}\ \text{Quart}.$$

83. Der Inhalt einer körperlichen Zone, unter a und b die Radien der begrenzenden Kreise und unter h die Höhe verstanden, ist =



$$K = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Ein Kuppelgewölbe habe eine lichte Weite von 26′ 4″, eine Stärke von 10″, und es befinde sich in einer Höhe



von 12′ 8″ eine Laterne. Wie groß ist der Inhalt des Mauerwerks in Schachtruthen?

Zuvörderst muß der Radius der Laterne = b berechnet werden. Bezeichnet man denselben mit x, so ist nach §. 7 $x^2 = (13^1/_6)^2 - (12^2/_3)^2 = {}^1/_6 \sqrt{465} = {}^1/_6 \cdot 21{,}56 =$ $3{,}59' = 3'\ 7''$.

Den Inhalt des Mauerwerks findet man in der Differenz der äußern und innern Zone.

Für die äußere Zone ist $a = 14'$, $b = 4'\ 5''$, $h = 12'\ 8''$.

Für die innere Zone ist $a = 13'\ 2''$, $b = 3'\ 7''$, $h = 12'\ 8''$,

mithin der Inhalt in Schachtruthen =

$$\frac{{}^1/_6\,\pi \cdot 12^2/_3\ [3 \cdot 14^2 + 3 \cdot (4^5/_{12})^2 + (12^2/_3)^2]}{144} -$$

$$\frac{{}^1/_6\,\pi \cdot 12^2/_3\ [3 \cdot (13^1/_6)^2 + 3 \cdot (3^7/_{12})^2 + (12^2/_3)^2]}{144}$$

$$= {}^1/_6\,\pi \cdot \frac{12^2/_3}{144}\ (588 + 58^{25}/_{48} + 160^4/_9 - 520^1/_{12} -$$

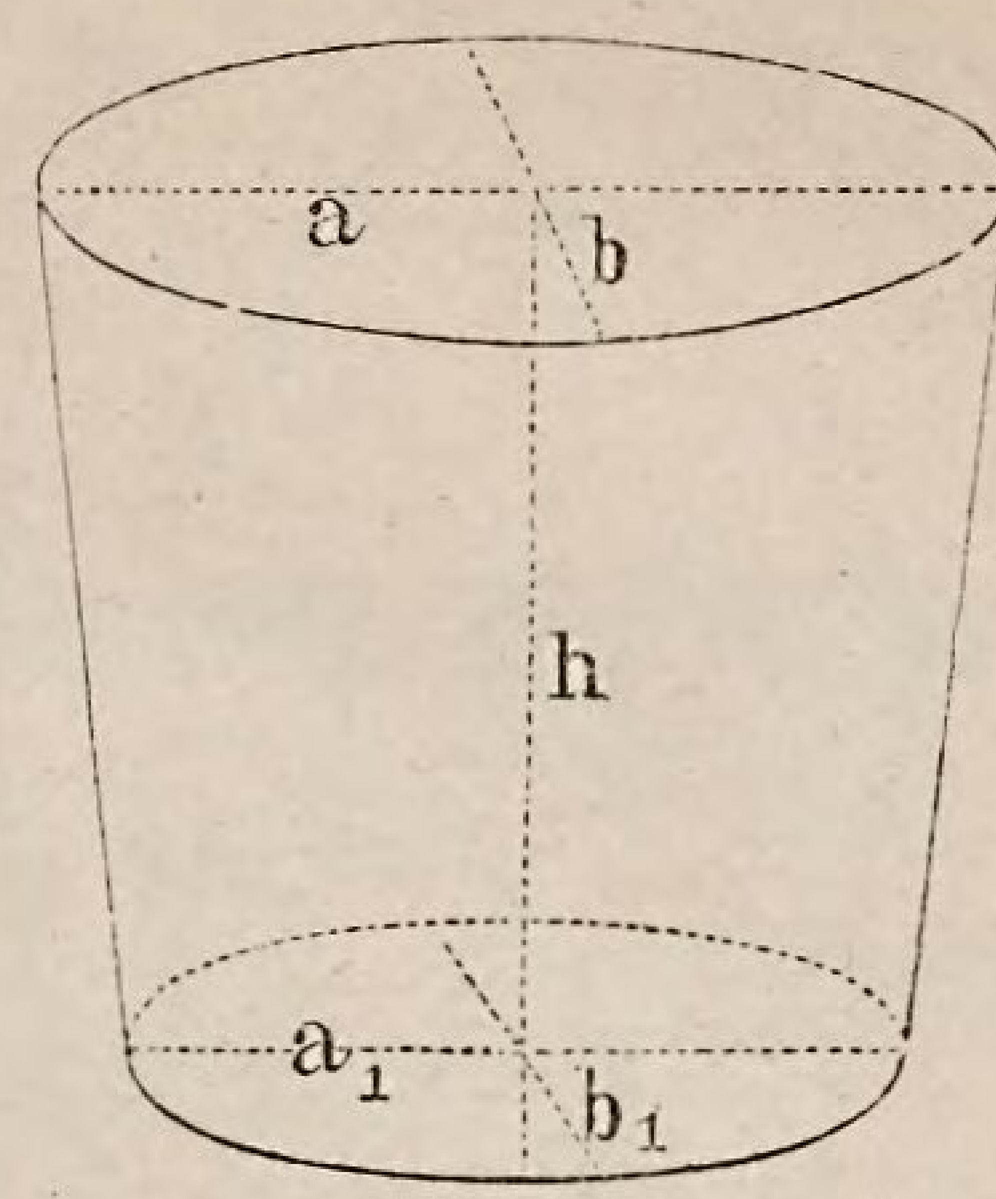
$$38^{25}/_{48} - 160^4/_9) =$$

$$\frac{1 \cdot 22 \cdot 38 \cdot 1055}{6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 144} = \frac{220495}{54432} = 4 \text{ Schachtr. } 7^{121}/_{378}\text{c}'.$$

84. Der Inhalt eines Kübels mit unähnlichen elliptischen Grundflächen, deren Halbmesser = a und b, a_1 und b_1 sind, und dessen Höhe = h ist, beträgt

$$K = \frac{\pi h}{6}\ [2\ (ab + a_1\ b_1) + ab_1 + a_1\ b].$$

Ist z. B. der Kübel 16″ tief, in der Mündung 40″

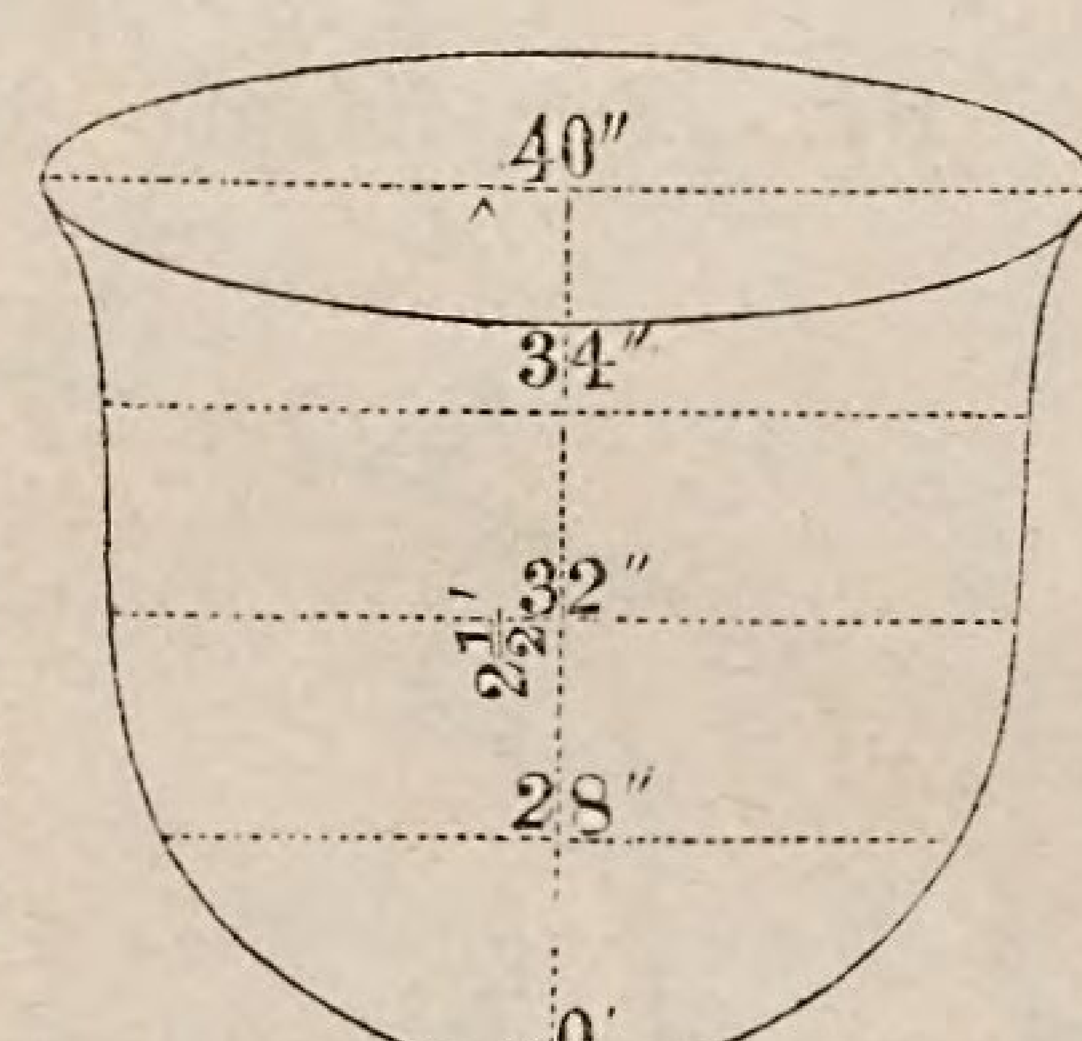


lang und 24″ breit, am Boden 32″ lang und 20″ breit, so ist dessen Inhalt =

$^{22}/_7 \cdot {}^{16}/_6\, [2\,(12 \cdot 20 + 16 \cdot 10) + 20 \cdot 10 + 16 \cdot 12] = \frac{22 \cdot 16 \cdot 1192}{7 \cdot 6} = 9990^2/_{21}\ c''$ $= 156^3/_{32}$ Quart.

85. Der Inhalt irregulärer Körper wird in ähnlicher Weise wie der Inhalt irregulärer Flächen §. 46 gefunden. So z. B. ist der Inhalt eines Kessels, dessen Höhe = h und wenn die in gleichen Abständen gemessenen Querschnitte = F_1, F_2, F_3 u. s. w. sind, =

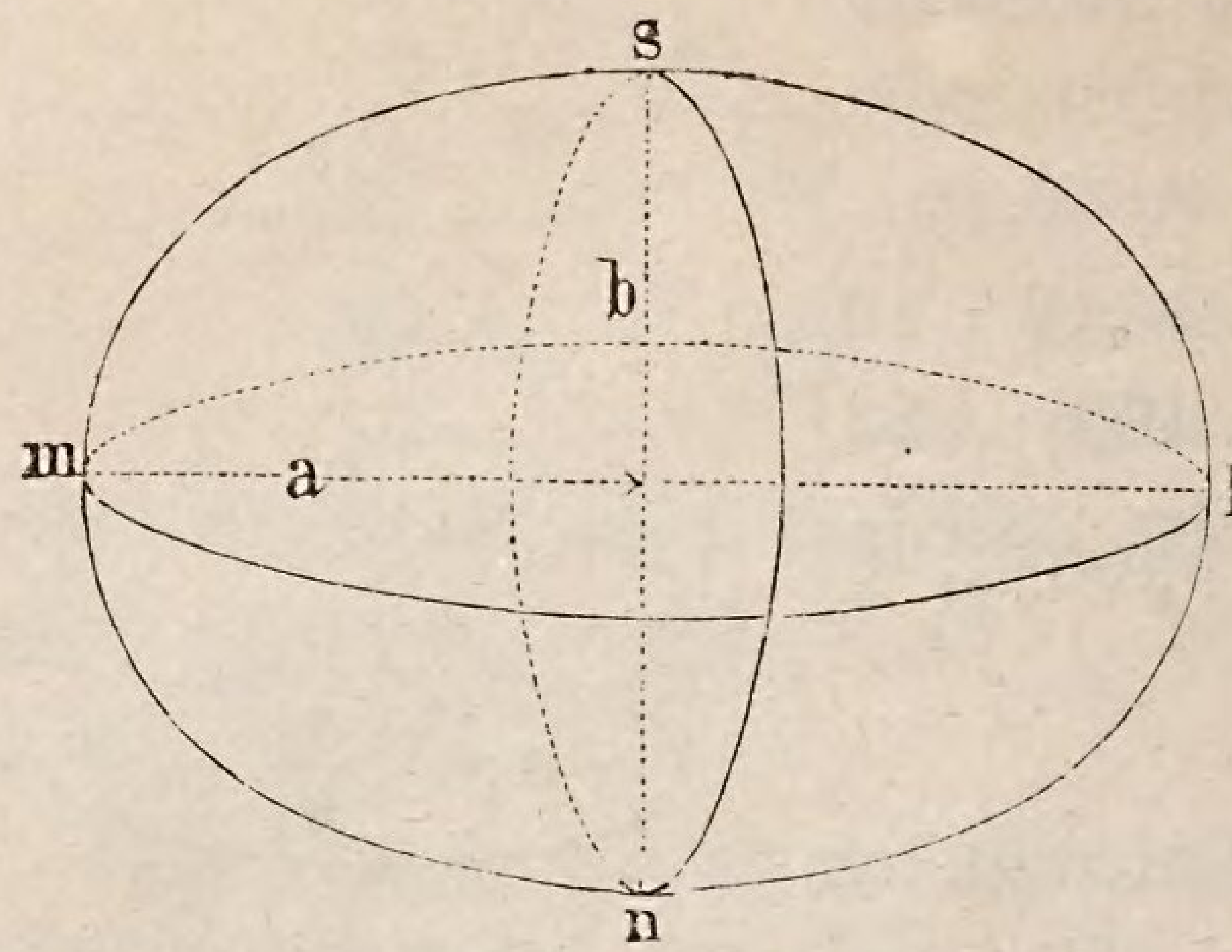
$$K = \frac{h}{12}\,[F_1 + 4\,(F_2 + F_4 + \cdot\ \cdot\ \cdot F_{2n}) + 2\,(F_3 + F_5 + \cdot\ \cdot\ \cdot F_{2n-1}) + F_{2n+1}].$$



Ein Kessel mit kreisförmigen Querschnitten habe bei $2^1/_2{}'$ Tiefe folgende Weiten: in der Mündung 40″, um den vierten Theil der Tiefe 34″, in der halben Tiefe 32″, bei $^3/_4$ der Tiefe 28″, am Boden 0″; wie groß ist sein Fassungsraum?

$$^{30}/_{12}\,[\pi \cdot 20^2 + 4\,(\pi \cdot 17^2 + \pi \cdot 14^2) + 2 \cdot \pi \cdot 16^2 + 0] = \frac{30\pi}{12}\,[20^2 + 4\,(17^2 + 14^2) + 2 \cdot 16^2] = \frac{5\pi}{2} \cdot$$

$2852 = 22408^4/_7\ c'' = 2^{2467}/_{2688}$ Ohm = 2 Ohm $110^1/_8$ Quart. (1 Ohm = $4^4/_9\ c'$.)



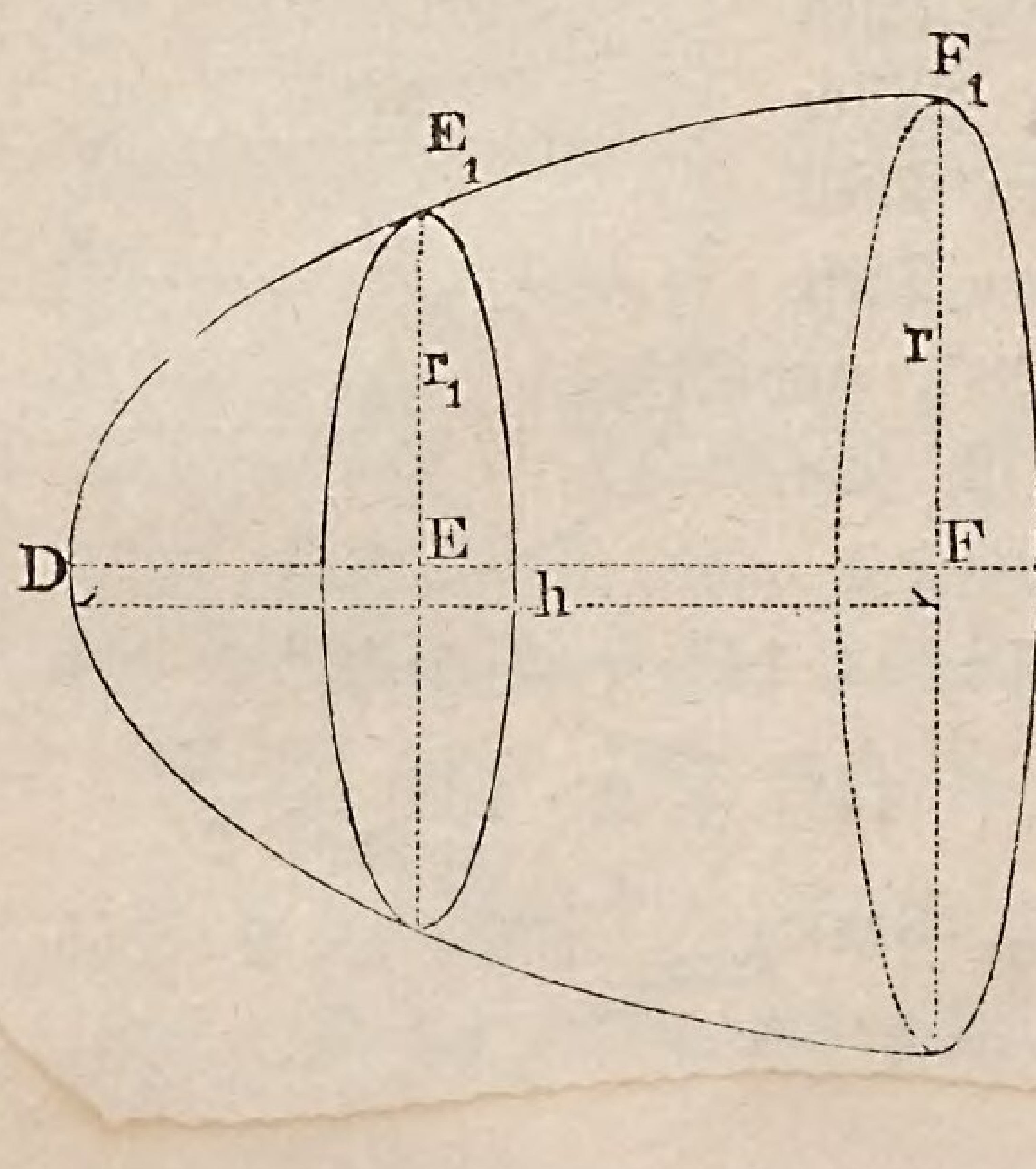
86 Der Inhalt eines Ellipsoids, durch Drehung um die Achse mp entstanden, ist $= \frac{4}{3}\, ab^2\pi$, und um die Achse ns entstanden, ist $= \frac{4}{3}\, a^2 b\pi$.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Ellipsoids, dessen große Achse $= 22'$ und dessen kleine Achse $= 16'$ ist?

Entweder $= \frac{4}{3} \cdot 11 \cdot 8^2\pi = \frac{4 \cdot 11 \cdot 64 \cdot 22}{3 \cdot 7} = 2950\frac{2}{21}$ c′ (Drehung um die große Achse)

oder $= \frac{4}{3} \cdot 11^2 \cdot 8 \cdot \pi = \frac{4 \cdot 121 \cdot 8 \cdot 22}{3 \cdot 7} = 4056\frac{8}{21}$ c′ (Drehung um die kleine Achse).

87. Der kubische Inhalt eines parabolischen Conoids (Drehung der Fläche DFF_1 um die Achse DF), unter h die Achse DF und unter r die halbe Weite FF_1 verstanden, ist $= K = \frac{1}{2}\, \pi r^2 h$.



Ein Heuschober habe in der Basis einen Durchmesser von 16′ 8″ und eine Höhe von 22′ 9″; wie viel beträgt der kubische Inhalt?

$$\tfrac{1}{2}\,\pi \cdot (8\tfrac{1}{3})^2 \cdot 22\tfrac{3}{4} = \frac{1 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 91}{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$2482\tfrac{23}{36}$ c'.

88. Der kubische Inhalt des abgekürzten parabolischen Conoids $EFF_1\,E_1$ ist =

$$K = \tfrac{1}{2}\,(r^2 + r_1{}^2)\,\pi h.$$

Ist $r = 5'\ 6''$, $r_1 = 4'\ 9''$, $h = 8'\ 4''$, so ist

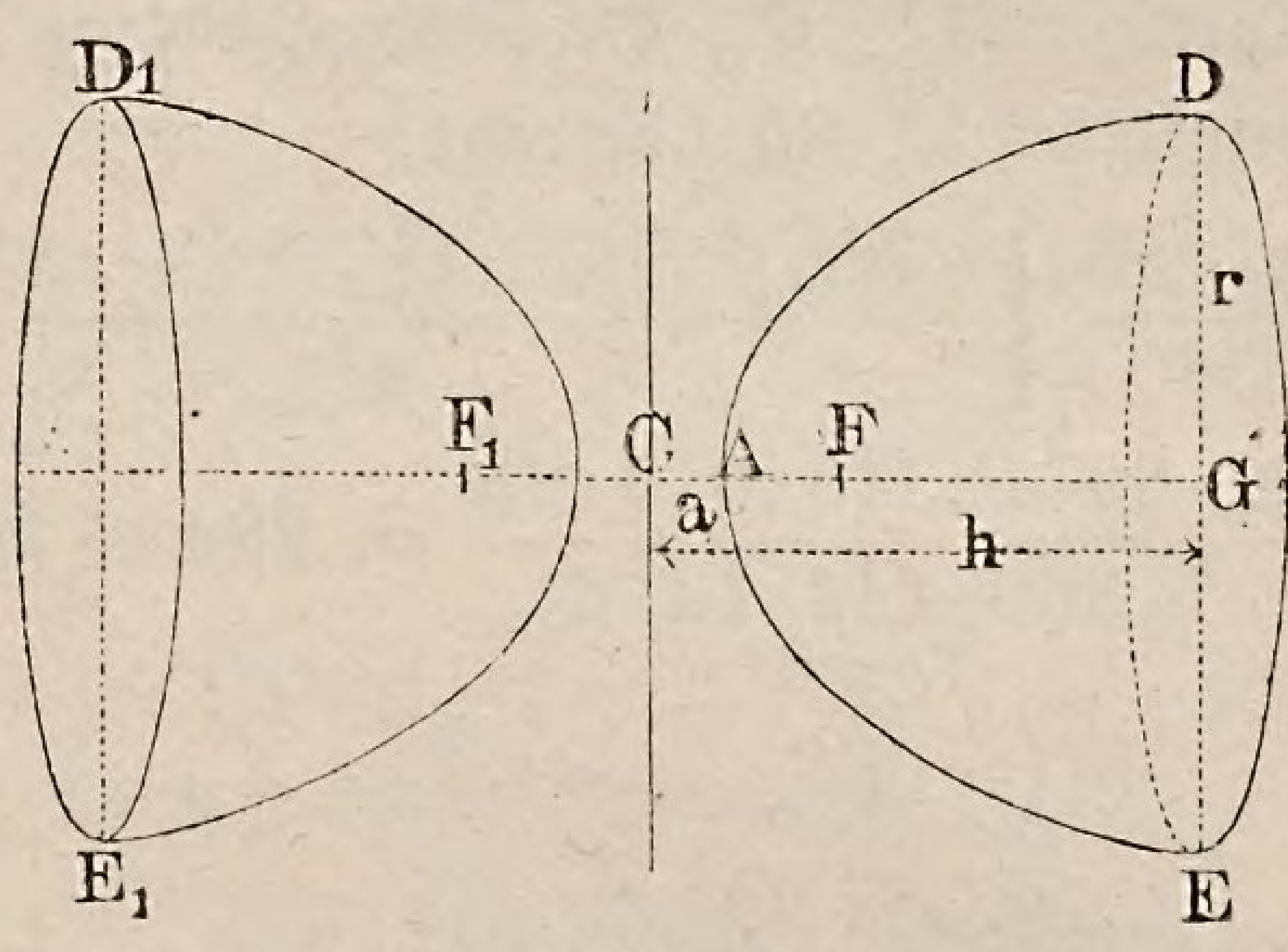
$$K = \tfrac{1}{2}\,[(5\tfrac{1}{2})^2 + (4\tfrac{3}{4})^2]\,\pi \cdot 8\tfrac{1}{3} = \frac{1 \cdot 845 \cdot 22 \cdot 25}{2 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 3} =$$

$691\tfrac{199}{366}$ c'.

89. Der Inhalt des hyperbolischen Conoids $DEE_1\,D_1$, wenn $a = CA$, $r = DG$, $h = CG$, ist =

$$K = \frac{\pi r^2 b^2}{3\,a^2}\,(h + 3a).$$

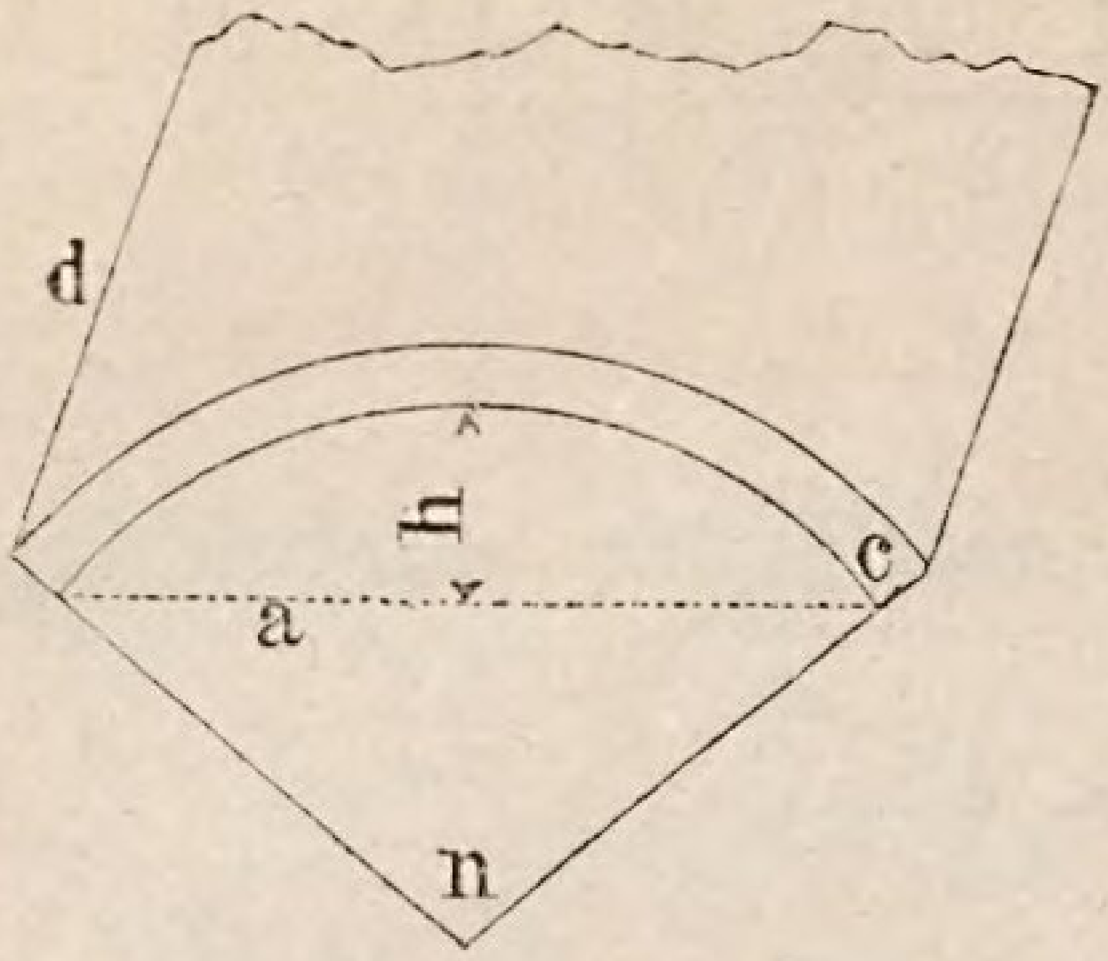
(F und F_1 die Brennpunkte; $CF = CF_1 = e$ und $e^2 - a^2 = b^2$.)



Ist $r = 3'\ 8''$, $e = 2'\ 4''$, $a = 1'\ 3''$, $h = 4'\ 3''$, so ist $b^2 = (2\tfrac{1}{3})^2 - (1\tfrac{1}{4})^2 = 3\tfrac{127}{144}$ und

$$K = \frac{\pi \cdot (3\tfrac{2}{3})^2 \cdot 3\tfrac{127}{144}}{3\,(1\tfrac{1}{4})^2}\,(4\tfrac{1}{4} + 3 \cdot 1\tfrac{1}{4}) =$$

$$\frac{22 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 559 \cdot 8 \cdot 16}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 144 \cdot 3 \cdot 25} = 280 \text{ c' beinahe.}$$



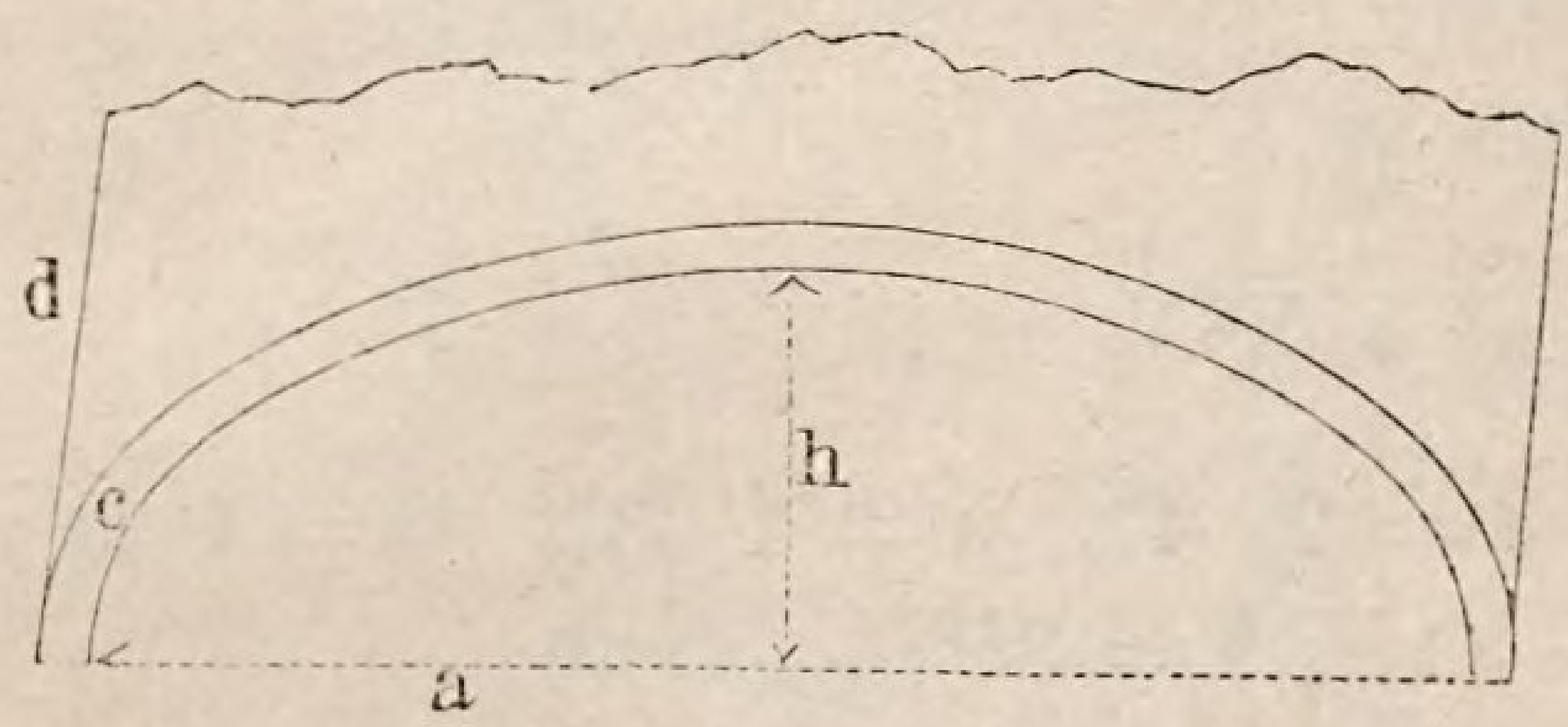
90. Von einem kreisförmigen Gewölbe ist die halbe lichte Weite $= a$, die lichte Höhe $= h$, die Stärke $= c$, die Länge $= d$ und der Mittelpunktswinkel $= n$, in Graden ausgedrückt, gegeben; es ist der Inhalt der Ueberwölbung =

$$K = \frac{\pi \cdot n}{360} \left(\frac{a^2 + h^2 + ch}{h}\right) cd.$$

Den körperlichen Inhalt eines Tonnengewölbes von 25′ Länge, und 10″ Stärke zu berechnen, wenn die lichte Weite = 15′ 6″, die lichte Höhe = 4′ 8″ und der Mittelpunktswinkel 85° beträgt?

$$\frac{\pi \cdot 85}{360} \left[\frac{(7^3/_4)^2 + (4^2/_3)^2 + {}^5/_6 \cdot 4^2/_3}{4^2/_3}\right] {}^5/_6 \cdot 25 =$$

$$\frac{22 \cdot 85 \cdot 12345 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 25}{7 \cdot 360 \cdot 144 \cdot 14 \cdot 6} = 284 \text{ c}' \text{ beinahe oder 2 Schachtr.}$$



91. Ist ein Korbbogen aus 3 Mittelpunkten construirt, gehört jeder Bogen zu einem Mittelpunktswinkel von 60°, und ist die halbe lichte Weite $= a$, die lichte Höhe $= h$, die Stärke $= c$ und die Länge des Gewölbes $= d$ gegeben, so ist der Inhalt der Ueberwölbung =

$$K = {}^1/_6\, \pi c d\, [5a + 3c + h - (a - h) \sqrt{3}].$$

Ist c = 10″, d = 12′ 8″, a = 5′ 4″, h = 3′ 3″, so ist

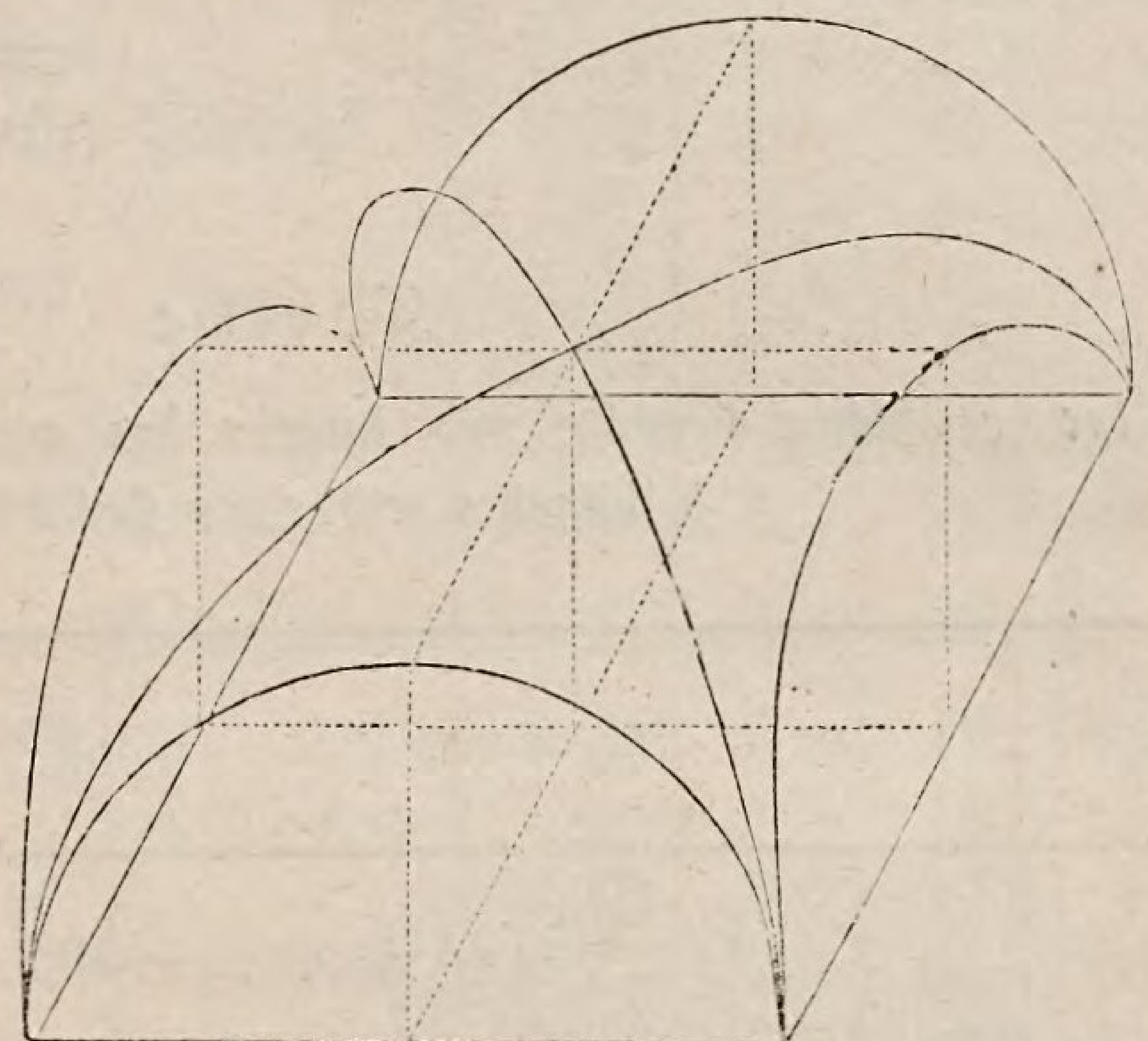
$K = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \frac{5}{6} \cdot 12\frac{2}{3} [5 \cdot 5\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{5}{6} + 3\frac{1}{4} - (5\frac{1}{4} - 3\frac{1}{4}) \sqrt{3}] = \frac{22 \cdot 5 \cdot 38 \cdot 28{,}96}{6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3} = 160{,}12$ c′ = 160 c′ 207 c″ oder $1\frac{1}{9}$ Schachtr.

92. Die Oberfläche eines Kreuzgewölbes, dessen Grundfläche ein Quadrat von a′ halber Seitenlänge bildet, ist =

$F = 4{,}56\ a^2$

und der körperliche Inhalt

$K = 3{,}62\ a^3$.



Ist die lichte Weite des Gewölbes = 10′ und die Stärke = 10″, so ist die äußere Oberfläche = $4{,}56\ (5\frac{5}{6})^2 = 155\frac{1}{6}\square'$ und die innere Oberfläche = $4{,}56 \cdot 5^2 = 114\square'$.

Der kubische Inhalt des Gewölbes wird gefunden, indem man den durch das Gewölbe begrenzten Raum als volle Masse berechnet, und hiervon den Inhalt des hohlen Raumes abzieht. Mithin ist der Inhalt der Ueberwölbung $= 3{,}62\ [(5\frac{5}{6})^3 - 5^3] = 266$ c′ = 1 Schachtr. 122 c′.

In der Praxis, wo es meistens nur darauf ankommt, die Oberfläche zu ermitteln, genügt es, wenn man den Flächeninhalt des Grundrisses mit $1\frac{1}{7}$ multiplicirt.

Im obigen Falle wäre hiernach die innere Oberfläche des Kreuzgewölbes $= 10 \cdot 10 \cdot 1\frac{1}{7} = 114\frac{2}{7}\square'$.

Bei gothischen Kreuzgewölben nimmt man in der Praxis gewöhnlich das Doppelte des Flächeninhalts des Grundrisses als Oberfläche des Gewölbes. Ist z. B. ein gothisches Kreuzgewölbe, in plano gemessen, 16′ 8″ lang und 12′ 6″ breit, so ist seine Oberfläche $2 \cdot 16\frac{2}{3} \cdot 12\frac{1}{2} = 416\frac{2}{3}\square'$.

Tabelle

der specifischen Gewichte und Angabe des wirklichen Gewichts eines Kubikzolles und eines Kubikfußes.

Nr.	Gegenstand.	Specif. Gewicht.	Gew. für 1 c″. Lth.	Gewicht für 1 c′. Pfd.	Lth.
	A. Metalle.				
1	Blei	11,35	12,2	700	22
2	Eisen, Schmiede=	7,79	8,4	480	28
3	= , Guß=	7,25	7,8	447	18
4	Gold, geschmolzen	19,25	20,6	1188	14
5	= , gehämmert	19,60	21,0	1210	2
6	Glockenmetall (78 Kupfer, 22 Zinn)	8,82	9,5	544	16
7	Kanonengut	8,79	9,4	542	20
8	Kupfer, gegossen	8,76	9,4	540	25
9	= , gehämmert . . .	8,88	9,5	548	7
10	Messing, im Mittel . . .	8,40	9,0	518	7
11	Messingdraht	8,54	9,2	527	7
12	Nickel	8,28	8,9	511	6

Nr.	Gegenstand.	Specif. Gewicht.	Gew. für 1 c". Lth.	Gewicht für 1 c'. Pfd.	Lth.
13	Platin, gehämmert . . .	21,25	22,8	1311	28
14	= , gemünzt	22,10	23,7	1364	10
15	Quecksilber	13,60	14,6	839	3
16	Silber, gegossen	10,47	11,2	646	12
17	= , gehämmert . . .	10,62	11,4	655	20
18	Stahl, weicher	7,83	8,4	483	12
19	= , gehämmert	7,84	8,4	484	1
20	= , im Wasser gehärtet .	7,82	8,4	482	24
21	= , Guß	7,92	8,5	488	29
22	Zink, geschmolzen	6,86	7,4	423	11
23	= , gewalzt	7,04	7,5	434	19
24	Zinn, engl. gegossen . . .	7,30	7,8	450	21
25	= , = gehämmert . .	7,48	8,0	461	24
	B. Stein= und Erdarten.				
26	Alabaster	2,63	2,8	162	11
27	Asphalt	1,66	1,8	102	15
28	Basalt	2,79	3,0	172	8
29	Basaltlava von Niedermendig	2,73	2,9	168	16
30	Bimsstein	0,92	0,9	56	24
31	Bruchstein	2,46	2,6	151	26
32	= , weicher . . .	1,98	2,1	122	7
33	Feldspat	2,28	2,4	140	23
34	Glas, Flaschen=	2,76	2,9	170	12
35	= , Fenster=	2,64	2,8	162	29
36	Granit, im Mittel . . .	2,70	2,9	166	21
37	Gips, roh	2,20	2,4	135	25
38	= , gebrannt	1,80	1,9	111	4
39	= , gegossen und ausgetrocknet	0,97	1,0	59	26
40	Kalkmörtel, frisch	1,79	1,9	110	15
41	= , trocken	1,64	1,8	101	7

Nr.	Gegenstand.	Specif. Gewicht.	Gew. für 1 c″. Lth.	Gewicht für 1 c′. Pfd.	Lth.
42	Kalkstein, dichter	2,46	2,6	151	26
43	Kreide	2,25	2,4	138	27
44	Lehm, frischer	1,66	1,8	102	15
	Mauer mit Kalkmörtel:				
45	von Ziegelstein, frisch . .	1,63	1,7	100	19
46	= = , trocken .	1,53	1,6	94	14
47	von Bruchstein, frisch . .	2,46	2,6	151	26
48	= = , trocken .	2,40	2,6	148	5
49	Marmor, carrarischer . . .	2,72	2,9	167	28
50	Quarz	2,65	2,8	163	18
51	Sand, trocken	1,64	1,8	101	7
52	Sandstein von Flonheim . .	2,11	2,3	130	8
53	= = Heilbronn .	2,12	2,3	130	26
54	= Keuper= von Schaitdorf	2,18	2,3	134	17
55	= Keuper= aus der Höll .	2,00	2,1	123	14
56	= von Obernkirchen .	2,15	2,3	132	22
57	= von Welfangen bei Trier	2,12	2,3	130	26
58	Sandstein, im Mittel . .	2,35	2,5	145	2
59	Schiefer	2,76	3,0	170	12
60	Tuffstein aus dem Brohlthal	1,25	1,3	77	5
61	Trachyt vom Drachenfels . .	2,21	2,4	136	13
62	= = Stenzelberg . .	3,51	3,8	216	21
63	= von Berkum . . .	3,05	3,3	188	9
64	Ziegelstein	1,53	1,6	94	13
	C. Holzarten.				
65	Ahorn	0,75	0,8	46	8
66	Birnbaum	0,66	0,7	40	22
67	Buche	0,85	0,9	52	13
68	Buchsbaum, franz. . . .	0,91	1,0	56	5
69	= , holl.	1,03	1,1	63	18

Nr.	Gegenstand.	Specif. Gewicht.	Gew. für 1 c″. Lth.	Gewicht für 1 c′. Pfd.	Lth.
70	Cedernholz, amerik. . . .	0,56	0,6	34	17
71	Ebenholz, amerik.	1,33	1,4	82	3
72	= , indisches . . .	1,21	1,3	74	21
73	Eichenholz, vom Kerne, naß	1,17	1,3	72	4
74	= , vom Stamme, trocken . . .	0,72	0,8	44	13
75	= , vom Splinte, trocken . . .	0,61	0,7	37	20
76	= , vom Stamme, naß	0,84	0,9	51	26
77	Erlenholz	0,68	0,7	41	29
78	Eschenholz, vom Stamme .	0,85	0,9	52	13
79	Fichtenholz, frisch	0,55	0,6	33	29
80	= , trocken . . .	0,43	0,5	26	16
81	Kiefer, vom Stamme, frisch	0,72	0,8	44	13
82	= , vom Kerne, trocken .	0,62	0,7	38	8
83	Kirschbaum, trocken . . .	0,72	0,8	44	13
84	Korkholz	0,24	0,3	14	24
85	Linde, trocken	0,60	0,6	37	1
86	Mahagoni	1,06	1,1	65	13
87	Nußbaum	0,68	0,7	41	29
88	Pappel	0,38	0,4	23	14
89	Pockholz	1,26	1,4	77	24
90	Rothtanne	0,47	0,5	29	—
91	Steineiche, vom Stamme, trocken	0,72	0,8	44	13
92	Weißtanne	0,55	0,6	33	29
93	Weidenholz	0,58	0,6	35	24
	D. Flüssigkeiten.				
94	Leinöl	0,94	1,0	58	1
95	Rüböl	0,92	1,0	56	24
96	Salpetersäure	1,27	1,4	78	12

Nr.	Gegenstand.	Specif. Gewicht.	Gew. für 1 c″. Lth.	Gewicht für 1 c′. Pfd.	Lth.
97	Salzsäure	1,21	1,3	74	21
98	Schwefelsäure	1,86	2,0	114	25
99	Wasser	1,00	1,1	61	22
100	Weingeist	0,84	0,9	51	26

1. Wie schwer ist eine Fensterbank von stenzelberger Trachyt von $4\frac{1}{2}'$ Länge, $1\frac{1}{4}'$ Breite und $10''$ Stärke?

$$4\tfrac{1}{2} \cdot 1\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot 216\tfrac{21}{30} = 1015 \text{ Pfd. } 23 \text{ Lth.}$$

2. Wie schwer ist ein Balken von Tannenholz, der $18\frac{1}{4}'$ lang, $10\frac{1}{2}''$ breit und $12\frac{1}{2}''$ hoch ist?

$$18\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{25}{24} \cdot 33\tfrac{29}{30} = 565 \text{ Pfd.}$$

3. Wie viel wiegt eine viereckige geschmiedete Eisenstange von $1 \square''$ Querschnitt und $1'$ Länge?

$$1 \cdot 12 \cdot 8{,}4 = 3 \text{ Pfd. } 11 \text{ Lth.}$$

Um das Gewicht einer jeden viereckigen geschmiedeten Eisenstange in preuß. Pfunden zu finden, multiplicire man den Querschnitt in Quadratzollen mit der Länge in Fußen und das Product mit 3,339.

Wie viel wiegt demnach eine quadratische Eisenstange von $4'$ $8''$ Länge und $1\frac{7}{8}''$ Dicke?

$$1\tfrac{7}{8} \cdot 1\tfrac{7}{8} \cdot 4\tfrac{2}{3} \cdot 3{,}339 = 54 \text{ Pfd. } 23 \text{ Lth.}$$

4. Wie viel wiegt eine runde Stange von Schmiedeeisen, welche $1''$ Durchmesser und $1'$ Länge hat?

$$\pi \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 12 \cdot 8{,}4 = 2 \text{ Pfd. } 19 \text{ Lth.}$$

Um das Gewicht einer runden geschmiedeten Eisenstange in preuß. Pfunden zu erhalten, multiplicire man das Quadrat

des Durchmessers in Zollen mit der Länge in Fußen und das Product mit 2,621.

Wie viel wiegt demnach eine runde Eisenstange von $9\frac{1}{2}'$ Länge und $1\frac{3}{8}''$ Durchmesser?

$$(1\tfrac{3}{8})^2 \cdot 9\tfrac{1}{2} \cdot 2{,}621 = 47 \text{ Pfd.}$$

5. Wie viel Pfund Weingeist enthält eine cylindrische Flasche von $5\frac{3}{4}''$ Durchmesser und $8\frac{1}{4}''$ Höhe?

$$\pi \cdot \left(\frac{5\frac{3}{4}}{2}\right)^2 \cdot 8\tfrac{1}{4} \cdot 0{,}9 = 193 \text{ Lth.} = 6 \text{ Pfd. } 13 \text{ Lth.}$$

6. Ein eiserner Spitzbolzen aus einzölligem quadratischen Eisen geschmiedet, sei $3\frac{1}{2}'$ lang und habe zur einen Hälfte die Form eines Prismas, zur andern die einer vierseitigen Pyramide. Wie groß ist das Gewicht desselben?

$$(1^2 \cdot 21 + 1^2 \cdot {}^{21}\!/_3)\ 8{,}4 = 7 \text{ Pfd. } 25 \text{ Lth.}$$

7. Wie schwer ist ein Pfeiler von Welfanger Stein, der die Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedons mit aufgestelltem abgestumpften Kegel hat, wenn das Parallelepipedon $3'\ 7''$ Länge und Breite und $2\frac{1}{2}'$ Höhe hat, und der Durchmesser der untern Grundfläche des abgestumpften Kegels $3'\ 4''$, der obere $2'\ 2''$ und die Höhe $6'\ 9''$ beträgt?

$$\left[3\tfrac{7}{12} \cdot 3\tfrac{7}{12} \cdot 2\tfrac{1}{2} + \frac{\pi \cdot 6\frac{3}{4}}{3}\left((1\tfrac{2}{3})^2 + (1\tfrac{1}{12})^2 + 1\tfrac{2}{3} \cdot 1\tfrac{1}{12}\right)\right]$$

$$130\tfrac{26}{30} = 9138 \text{ Pfd. } 12 \text{ Lth.}$$

8. Wie viel wiegt eine Bleiröhre von $1\frac{1}{2}''$ lichter Weite, $2\frac{1}{2}'''$ Wandstärke und $20'$ Länge?

$$\tfrac{22}{7}\,[(\tfrac{23}{24})^2 - (\tfrac{5}{24})^2]\ 20 \cdot 12 \cdot 12{,}2 = 268 \text{ Pfd. } 12 \text{ Lth.}$$

9. Wie schwer ist eine Kugel von Pockholz von $7\frac{1}{4}''$ Durchmesser?

$$\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{22}{7} \cdot (3\tfrac{5}{8})^3 \cdot 1{,}4 = 9 \text{ Pfd. } 9 \text{ Lth.}$$

10. Ein Fenstergitter von 3′ 6″ Breite und 7′ Höhe hat 8 aufrechte Stangen von $7\frac{1}{2}'$ Länge, $\frac{3}{4}''$ Stärke im Viereck, und 2 Querstangen von 4′ Länge und 1″ im Viereck zur Stärke. Wie schwer ist das Gitter, wenn dasselbe aus Schmiedeeisen gefertigt ist?

$[8 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 1^2]\ 8{,}4 = 140$ Pfd. 8 Lth.

Ueber Festigkeit der Materialien.

I. Absolute Festigkeit, d. i. die Kraft, mit welcher ein Körper dem Zerreißen sich widersetzt.

Nachstehende Zahlen geben an, wie viel Pfund dazu gehören, einen Stab aus den angegebenen Stoffen von 1 □″ Querschnitt der Länge nach auseinander zu reißen.

Eichen	24880	Pfd.
Erlen	23140	=
Eschen	19630	=
Kiefern	19520	=
Buchen	19080	=
Tannen	14400	=
Fichten	10210	=
Linden	12970	=
Gußeisen	17770—17980	=
Stabeisen	66690—73010	=
Kupfer, geschmiedetes . . .	36350	=

Bleidraht	3680	Pfd.
Messingdraht	45350	=
Stahl, gehärteter	110490	=
= , biegsamer	117400—122330	=
Zink, gegossen	2710	=
Zinn.	8420	=

Bei einem gegebenen Querschnitte ist die absolute Festigkeit proportional dem Querschnitte. Ist z. B. der Querschnitt einer eichenen Stange $3 \square''$, so ist die absolute Festigkeit der Stange $3 \cdot 24880 = 74640$ Pfd.

Wenn es darauf ankommt, aus dem bekannten Maße der absoluten Festigkeit eines Körpers die Last zu bestimmen, welche er mit Sicherheit tragen kann, so nimmt man bei Hölzern und Seilen den dritten Theil, bei Metallen die Hälfte der absoluten Festigkeit.

1. Welche einen Eichenbalken von 10'' Dicke und 12'' Breite der Länge nach beschwerende Last kann von demselben mit Sicherheit getragen werden?

Der Querschnitt beträgt $120 \square''$, daher die absolute Festigkeit $120 \cdot 24880$ Pfd., und die Sicherheit $\frac{120 \cdot 24880}{3} = 995200$ Pfd.

2. Welche Last wird eine 20' lange, $^7/_8$'' im Durchmesser haltende schmiedeeiserne Stange mit Sicherheit tragen können, wenn das Gewicht der Stange mit wird?

Der Querschnitt ist $= \pi \cdot (^7/_{16})^2 \square''$; die absolute sichere Festigkeit $\frac{\pi \cdot (^7/_{16})^2 \cdot 66690}{2} = 20040$ Pfd.; das Gewicht der Stange beträgt

$\pi\ (7/_{16})^2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 8{,}4 = 1212$ Lth. = 40 Pfd. 12 Lth., mithin die Last $20040 - 40 = 20000$ Pfd.

3. Ein eichener Balken soll eine Last von 300000 Pfd., welche auf denselben der Länge nach wirkt, dauernd tragen. Welche Dicke muß der Balken haben, wenn er 9″ breit ist?

$$\frac{9 \cdot x \cdot 24880}{3} = 300000;\ x = 4''.$$

II. Relative Festigkeit, d. i. die Kraft, mit welcher ein Körper sich dem Zerbrechen entgegensetzt.

Die relative Festigkeit richtet sich:

a. nach dem umgekehrten Verhältnisse der Länge, d. h. ist der Körper 2 mal, 3 mal länger, so ist seine relative Festigkeit 2 mal, 3 mal geringer.

b. nach dem geraden Verhältnisse der Breite, d. h. je breiter der Körper, desto größer die relative Festigkeit;

c. nach dem quadratischen Verhältnisse der Höhe, d. h. ist ein Körper 2 mal, 3 mal höher, so ist seine relative Festigkeit 4 mal, 9 mal größer.

Nach Eitelwein gehören zum Zerbrechen einer horizontalen Stange von 1″ Länge, 1″ Breite und 1″ Dicke, welche an dem einen Ende befestigt, an dem andern belastet ist, folgende Gewichte:

Kiefer . .	2690 Pfd.	Steineiche .	3840 Pfd.
Fichte . .	1920 =	Rothbuche .	4400 =
Weißtanne .	2560 =	Weißbuche .	2810 =
Sommereiche	3750 =	Erle . . .	3220 =

In der Praxis ist man ziemlich allgemein übereingekommen, einem Balken $1/_{18}$ bis $1/_{20}$ derjenigen Belastung zuzutrauen, bei welcher er brechen würde.

Wirkt die Last auf die Mitte des Balkens, und liegt der Balken mit beiden Enden auf, so kann er eine 4 mal so große Last, und sind beide Enden befestigt, eine 8 mal so große Last tragen, als die obige Tabelle angibt. Ist die ganze Last auf den Balken gleichmäßig vertheilt, so kann der Balken noch einmal so viel tragen, als wenn er blos in der Mitte belastet ist. Bei Hausteinen mittlerer Festigkeit muß die Höhe $^1/_8$ bis $^1/_6$ der freiliegenden Länge sein, wenn sie nicht unter ihrer eigenen Last brechen sollen.

4. Bei welcher Belastung wird 1. ein tannener, bei welcher 2. ein eichener Balken von 15′ Länge, 12″ Höhe und 8″ Breite brechen, wenn derselbe a) an dem einen Ende befestigt und an dem andern Ende beschwert ist; b) an beiden Enden aufliegt und c) an beiden Enden eingemauert ist, und in den beiden letzten Fällen in der Mitte beschwert ist?

1. a. $\frac{2560 \cdot 12^2 \cdot 8}{15 \cdot 12} = 16384$ Pfd.

b. $\frac{2560 \cdot 12^2 \cdot 8 \cdot 4}{15 \cdot 12} = 65536$ Pfd.

c. $\frac{2560 \cdot 12^2 \cdot 8 \cdot 8}{15 \cdot 12} = 131072$ Pfd.

2. a. $\frac{3750 \cdot 12^2 \cdot 8}{15 \cdot 12} = 24000$ Pfd.

b. $\frac{3750 \cdot 12^2 \cdot 8 \cdot 4}{15 \cdot 12} = 96000$ Pfd.

c. $\frac{3750 \cdot 12^2 \cdot 8 \cdot 8}{15 \cdot 12} = 192000$ Pfd.

5. Ein 8″ breiter, 9″ hoher Balken ist zureichend, eine gewisse Last zu tragen. Wie hoch wird eine 3zöllige Bohle sein müssen, damit sie bei gleicher Länge mit dem Balken dieselbe relative Festigkeit habe?

Bezeichnet man den Balken mit A, die Bohle mit B, so verhält sich

$$A : B = \left\{ \begin{matrix} 8 : 3 \\ 9^2 : x^2 \end{matrix} \right\} = 8 \cdot 9^2 : 3x^2 \text{ oder}$$

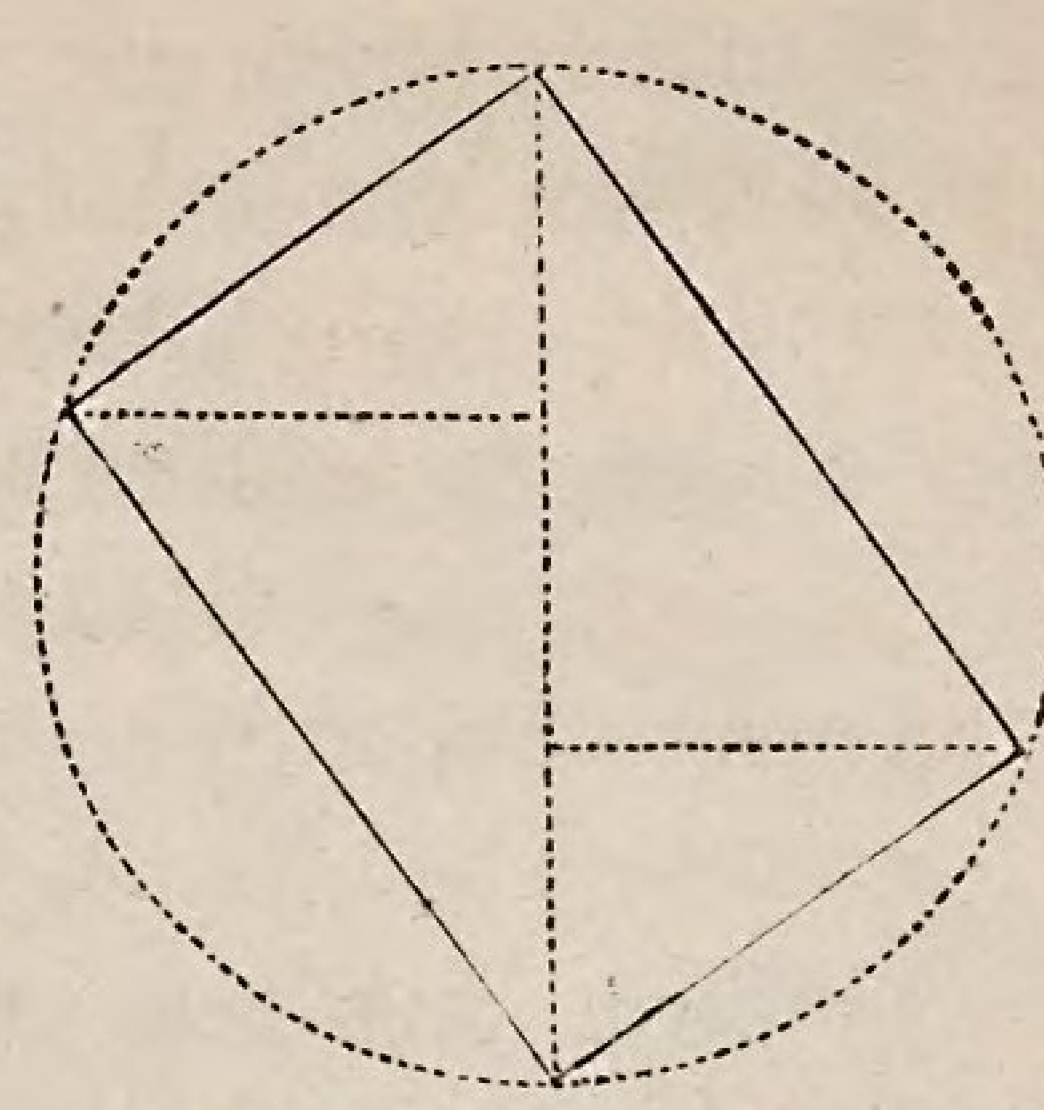
$3x^2 = 8 \cdot 9^2$ und $x = \sqrt{216} = 14{,}7'' = 1'\ 3''$ beinahe.

6. In einem Getreidemagazin seien 9″ breite, 12″ hohe tannene Balken 15′ weit frei gelegt und von Mitte zu Mitte des nächstens Balkens $2\frac{1}{2}'$ weit entfernt. Welche Sicherheit haben die Balken, wenn die Schüttung des Roggens 2′ Höhe hat, und wenn ein Kubikfuß Roggen 45 Pfd. wiegt und das Gewicht der Balken selbst mit berücksichtigt wird?

Das Gewicht, bei welchem die Balken brechen würden, ist $= \frac{2560 \cdot 9 \cdot 12^2}{15 \cdot 12} \cdot 16 = 294912$ Pfd.; der Druck auf jeden Balken beträgt $15 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 45 = 3375$ Pfd., das Gewicht des Balkens selbst $\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 15 \cdot 33\frac{29}{30} = 382$ Pfd., daher das Gewicht der Last und des Balkens $3375 + 382 = 3757$ Pfd. und mithin die Sicherheit $= \frac{294912}{3757} = 78$.

Die Balken haben also eine 78fache Sicherheit.

7. Um aus einem runden Baumstamme den stärksten Balken zu schneiden, theile man den Durchmesser des Querschnitts in 3 gleiche Theile, errichte in den beiden Theilungs-



punkten nach verschiedenen Seiten bis zur Peripherie Senkrechte und verbinde die Endpunkte mit den Endpunkten des Durchmessers, wodurch man den Querschnitt des viereckigen Balkens erhält.

Dieser Balken, bei welchem die Höhe und Breite in dem Verhältnisse wie $\sqrt{2}:1$ oder nahe wie 7 : 5 stehen, gibt, auf die hohe Kante gestellt, den stärksten Balken, den man aus dem Baumstamme schneiden kann.

III. Rückwirkende Festigkeit, d. i. die Kraft, mit welcher ein Körper sich dem Zerdrücken widersetzt.

Der Widerstand, den ein Körper dem Zerdrücken, Zerquetschen entgegensetzt, richtet sich nach dem Querschnitte, d. h. je größer der Querschnitt, desto größer der Widerstand.

Folgende Tabelle gibt an, wie viel Pfund auf einen Quadratzoll gehören, um den Körper zu zerdrücken.

Gußeisen	137050—245720	Pfd.
Kupfer	109530	"
Zinn	14460	"
Blei	7230	"
Ulmenholz	1200	"
Kiefernholz	1500	"
Weißtannen	1800	"
Eichen	4820	"
Ziegelstein, gut gebrannter .	1050	"
Kalkstein, fester	7220	"

Marmor, schwarzer	. . . .	8620	Pfd.
Sandstein von Heilbronn	. . . . .	3460	=
= = Obernkirchen	. . . .	7140	=
= = Udelfangen bei Trier	.	4950	=
= = Flonheim	. . . . .	4270	=
Keuper=Sandstein aus Schlaitdorf	. .	3370	=
= = = der Höll	. . .	1770	=
Tuffstein aus dem Brohlthale	. . .	730	=
Basaltlava von Niedermendig	. . .	5670	=
Trachytgestein vom Drachenfels	. . .	2580	=
= = Stenzelberge	. . .	11100	=
= von Berkum	. . . .	6110	=

In der Praxis soll man nach Rondelet bei Hölzern nie mehr als $\frac{1}{5}$, bei Bausteinen höchstens $\frac{1}{10}$ und bei Gußeisen höchstens $\frac{1}{4}$ dieser Belastung nehmen.

8. Welche Last kann ein gut gebrannter Ziegelstein von 10″ Länge, $4\frac{5}{6}$″ Breite tragen?

$$\frac{10 \cdot 4\frac{5}{6} \cdot 1050}{10} = 5075 \text{ Pfd.}$$

9. Wie viele runde Pfähle von 14″ Durchmesser von starkem Eichenholze müssen eingerammt werden, um ein Gebäude von 200000 Centner Gewicht mit Sicherheit zu tragen?

$$\frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 4820}{5} \cdot x = 100 \cdot 200000; \; x = 135 \text{ Stück.}$$

10. Welchen Durchmesser muß ein gußeiserner Cylinder haben, um eine Last von 480000 Pfd. mit Sicherheit tragen zu können?

Bezeichnet man den Halbmesser mit x, so ist

$$\frac{\pi = x^2 \cdot 137050}{4} = 480000$$ und $x = 2{,}1''$, daher der Durchmesser $= 4{,}2''$.

11. Welche Last kann ein heilbronner Sandstein von 3′ Länge und 3′ Breite mit Sicherheit tragen?

$$\frac{3^2 \cdot 3460}{10} = 3114 \text{ Pfd.}$$

Anhang.

Angabe der Verhältnisse, nach welchen die Materialien bei Landbauten berechnet werden.

1. Zu einer Schachtruthe Bruchsteinmauerwerk nach Abzug der Thür- und Fensteröffnungen

$1\frac{1}{4}$ Schtr. gute, lagerhafte, dicht aufgeruthete Bruchsteine,

16 und bei weniger lagerhaften Steinen 18 c′ Kalk.

2. Zu einer Schachtruthe Ziegelsteinmauerwerk nach Abzug der Oeffnungen und unter Berücksichtigung des Ziegelsteinformats von 10″ Länge, $4\frac{5}{6}$″ Breite, $2\frac{1}{2}$″ Dicke, wobei die Mauerstärken für 1 Stein zu $\frac{5}{6}$′, für $1\frac{1}{2}$ Stein zu $1\frac{1}{3}$′, für 2 Stein zu $1\frac{3}{4}$′, für $2\frac{1}{2}$ Stein zu $2\frac{1}{4}$′, für 3 Stein zu $2\frac{2}{3}$′ u. s. w. incl. $\frac{1}{2}$zölliger Kalkfugen anzunehmen sind:

1480 Stück Ziegelsteine,
$14\frac{5}{6}$ c′ Kalk,
37 = Sand.

3. Zu einer Schachtruthe Ziegelmauerwerk in Halbtraßmörtel:

1480 Stück Ziegelsteine,
$14\frac{5}{6}$ c′ Kalk,
$14\frac{4}{5}$ = Traß,
$22\frac{1}{5}$ = Sand.

4. Zu einer □Ruthe voller, $1/2$ Stein starken Fachwand, excl. Holzwerk:

480 Stück Ziegelsteine,
$4^{4}/_{5}$ c′ Kalk,
12 = Sand.

5. Zu einer □Ruthe dergl. $1/4$ Stein stark, oder mit Steinen auf der hohen Kante:

270 Stück Ziegelsteine,
$2^{7}/_{10}$ c′ Kalk,
$6^{3}/_{4}$ = Sand.

6. Zu einer □Ruthe dergl. mit 4″ starken Schwemmsteinen:

230 Stück Schwemmsteine,
4 c′ Kalk,
10 = Sand.

7. Zu einer □Ruthe Ziegelpflaster mit $1/4$zölligen Fugen in Kalkmörtel:

a. auf der hohen Kante
732 Stück Ziegelsteine,
7 c′ Kalk,
$17^{1}/_{2}$ = Sand;

b. auf die flache Seite
360 Stück Ziegelsteine,
$3^{1}/_{2}$ c′ Kalk,
$8^{3}/_{4}$ = Sand.

8. Zu einer □Ruthe dergl. in Halbtraßmörtel:

a. auf der hohen Kante
732 Stück Ziegelsteine,
7 c′ Kalk,

7 c′ Traß,
$10^1/_2$ = Sand;

b. auf die flache Seite
360 Stück Ziegelsteine,
$3^1/_2$ c′ Kalk,
$3^1/_2$ = Traß,
$5^1/_4$ = Sand.

Für eine 3″ hohe Sandschicht als Unterlage werden pro □Ruthe 36 c′ Sand mehr gerechnet.

9. Zu einer □Ruthe Plattenbelag in Kalkmörtel:
4 c′ Kalk,
10 = Sand;

und in Traßmörtel
4 c′ Kalk,
4 = Traß,
6 = Sand.

10. Zu einer □Ruthe Kappengewölbe, $^1/_2$ Stein stark, im Plane oder Grundrisse gemessen:

a. in Kalkmörtel
900 Stück Ziegelsteine,
9 c′ Kalk,
$22^1/_2$ = Sand;

b. in Halbtraßmörtel
900 Stück Ziegelsteine,
9 c′ Kalk,
9 = Traß,
$13^1/_2$ = Sand.

11. Zu einer □Ruthe Kreuzgewölbe mit $^1/_2$ Stein starken Kappen und 1 Stein starken Gräten:

a. in Kalkmörtel

1200 Stück Ziegelsteine,
12 c′ Kalk,
30 = Sand;

b. in Halbtraßmörtel

1200 Stück Ziegelsteine,
12 c′ Kalk,
12 = Traß,
18 = Sand.

12. Zu einer □Ruthe Tonnengewölbe halbkreisförmig, 1 Stein stark:

a. in Kalkmörtel

2000 Stück Ziegelsteine,
20 c′ Kalk,
50 = Sand;

b. in Halbtraßmörtel

2000 Stück Ziegelsteine,
20 c′ Kalk,
20 = Traß,
30 = Sand.

13. Zu einer □Ruthe Kalkmörtel=Verputz auf Ziegelmauern,

$^3/_8$″ stark:

3 c′ Kalk,
$7^1/_2$ = Sand;

bei $^1/_2$″ stark:

4 c′ Kalk,
10 = Sand;

bei $^3/_4$″ stark:

6 c′ Kalk,

15 = Sand.

14. Zu einer □Ruthe desgl. auf Bruchsteinen, bei $^3/_8$″ stark:

$3^3/_4$ c′ Kalk,

$9^3/_8$ = Sand;

bei $^1/_2$″ stark:

5 c′ Kalk,

$12^1/_2$ = Sand;

bei $^3/_4$″ stark:

$7^1/_2$ c′ Kalk,

$18^3/_4$ = Sand.

15. Zu einer □Ruthe Rapp=Putz:

2 c′ Kalk,

5 = Sand.

16. Zu einer □Ruthe Fugenputz:

1 c′ Kalk,

2 = Sand,

1 = Ziegelmehl.

17. Zu einer □Ruthe wasserdichten Traßputz:

4 c′ Kalk,

6 = Traß.

18. Zu einer □Ruthe Fachwandputz, incl. Putz des Holzwerks:

4 c′ Kalk,

10 = Sand,

25 Tüncher= oder Pliesterruthen,

250 Tüncher= oder Pliesternägel,

10 Pfd. Heu.

19. Zu einer □Ruthe Lattendecken-Putz, zweimal grundirt und dann glatt geputzt:

8 c′ Kalk,
20 = Sand,
80 Stück 10schüh. 2″ breite, 3/4″ starke Tannenlatten,
480 Lattennägel,
20 Pfd. Heu,
3 = Kuhhaare.

20. Zu einer □Ruthe Lehmstaakung mit glattem Deckenputz darüber:

300 Stück 2 1/2″ breite, 1 1/2″ starke Staakhölzer oder 80 Latten,
24 c′ Lehm,
30 Pfd. Heu,
2 1/2 c′ Kalk,
6 = Sand,
25 Tüncherruthen,
250 Tünchernägel.

21. Zu einer □Ruthe halben Windelboden:

300 Staakhölzer,
24 c′ Lehm,
36 Pfd. Stroh.

22. Zu einer □Ruthe Fachwerk zu staaken, auszuflechten und zu lehmen:

90 Staakhölzer,
200 Zaunruthen,
40 c′ Lehm,
40 Pfd. Stroh.

Zu den Arbeiten ad 20, 21 und 22 außerdem, wenn ein feiner Kalkputz aufgezogen wird:

2 c' Kalk,
5 = Sand,
1 Pfd. Haare.

23. Zu einer □ Ruthe zu weißen:

$^1/_4$ c' Kalk bei neuen Wänden,
$^1/_6$ = = = alten =

24. Zu einem steigenden Fuß Brunnen 3' im Lichten weit:

110 Ziegelsteine,
$1^1/_{10}$ c' Kalk,
$1^1/_{10}$ = Traß,
$1^3/_5$ = Sand.

Für jeden Fuß lichter Weite mehr kommen dazu:

40 Ziegelsteine,
$^4/_{10}$ c' Kalk,
$^4/_{10}$ = Traß,
$^6/_{10}$ = Sand.

25. Zu einem steigenden Fuß 1fachen Kamin:

18 Ziegelsteine,
$^1/_6$ c' Kalk,
$^5/_{12}$ = Sand.

26. Zu einer □ Ruthe Schieferdach:

13 Stück sogenannte 16schüh. Breter,
200 Stück Schalnägel,
3 Ries Dachschiefer à 8' lang,
8 Pfd. Schiefernägel à 300 Stück.

27. Zu einer □ Ruthe Pfannendach:

22 Stück 10schüh. Tannenlatten,

220 Lattnägel,

360 oder 400 Stück Pfannen, je nach der Größe,

oder

280 Stück graue holländische Pfannen.

28. Werden die Pfannendächer unterhalb mit Kalkmörtel verstrichen, so rechnet man für jede □Ruthe:

2 bis $2^1/_2$ c′ hydraulischen Kalk,

$6^1/_4$ c′ Sand,

2 Pfd. Schweinsborsten.

29. Bringt man in Lehm gesättigte Strohpuppen an, so braucht man zu einer □Ruthe:

100 Pfd. Stroh,

3 c′ Lehm.

30. Zu einer □Ruthe Zinkdach:

220 Pfd. Zinkblech, pro □Fuß $1^1/_4$ Pfd.

31. Zu einer □Ruthe Pappdach:

13 Stück sogenannte 16schüh. Breter,

200 Stück Schalnägel,

33 Stück getheerte Pappen à 33″ lang, 29″ breit.

1500 Stück kleine 1zöllige Kreuznägel.

32. Ein guter Beton besteht aus:

$2^1/_2$ Theilen Kalk, 5 Theilen Traß, 1 Theil Sand und $7^1/_2$ Theilen Ziegelschmolzen, und man nimmt zu einer Schachtruthe Beton:

$28^1/_8$ c′ Kalk,

$56^1/_4$ = Traß,

$11^1/_4$ = Sand,

$84^3/_8$ = Ziegelschmolzen.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

8 Math.

Müller

Müller